TEV

Matematika tau +

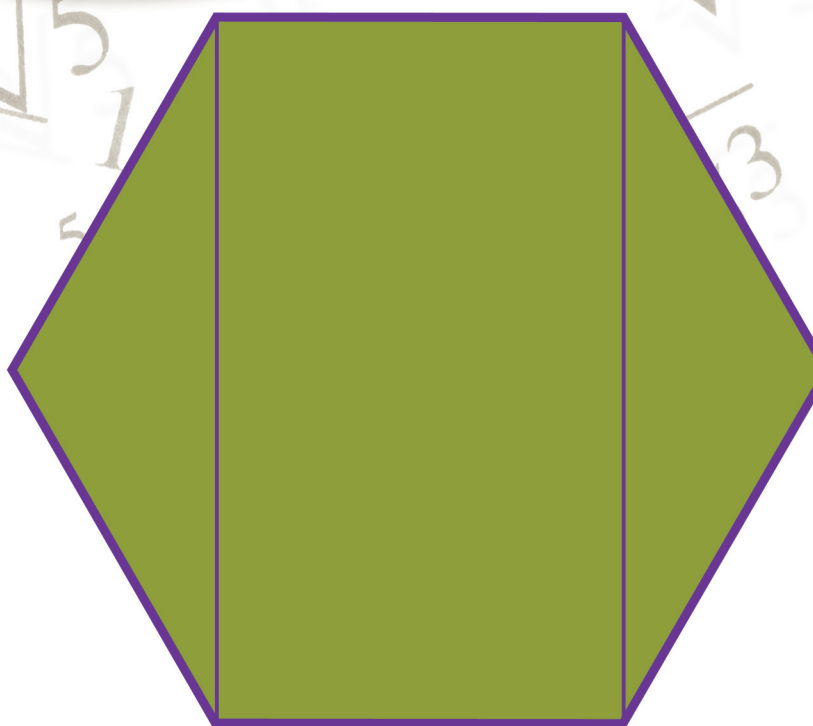




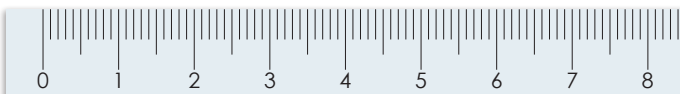
BENDRASIS KURSAS

11 klasė





Matematika tau+



BENDRASIS KURSAS

11 klasė

TEV
VILNIUS 2016

UDK 51(075.3)
Ma615

Valstybinės lietuvių kalbos komisijos 2011 m. balandžio 21 d. sprendimu vadovėlis atitinka kalbos taisyklingumo reikalavimus

Vadovėlio rankraščio mokslinę ekspertizę atliko Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas

Vadovėlį rengė: *Daiva Riukienė*, *Žydrūnė Stundžienė*

Projekto vadovas *Valdas Vanagas*

Darbo vadovė *Žydrūnė Stundžienė*

Programinė įranga: *Tadeuš Šeibak*, *Rolandas Jakštys*

Kompiuterinė grafika ir iliustracijos: *Edita Tatarinavičiūtė*, *Sigita Populaigienė*

Tekstą rinko ir maketavo: *Nijolė Drazdauskienė*, *Aldona Žalienė*

Kalbos redaktorė *Zita Manstavičienė*

Recenzentai: *Jolanta Gertrūda Knyvienė*, Simono Daukanto gimnazijos mokytoja metodininkė,
Rūta Biekšienė, Alytaus Volungės pagrindinės mokyklos mokytoja ekspertė

Papildytas ir pataisytas leidimas

Vadovėlio „Matematika Tau plius. 11 klasė. Bendrasis kursas“ komplektui medžiagą rengė:
Kornelija Intienė, *Daiva Riukienė*, *Regina Rudalevičienė*, *Kazimieras Pulmonas*, *Vytautas Silvanavičius*, *Žydrūnė Stundžienė*, *Vladas Vitkus*

Kompiuterinė vadovėlio versija svetainėje www.evadovėliai.lt

ISBN 978-609-433-281-4

© Leidykla TEV, Vilnius, 2016

PAGRINDINIAI SKYRELIAI

1. SKAIČIAI, VEIKSMAI, REIŠKINIAI

1.1. Skaičių aibės 12
1.2. Skaičių aibių sąjunga ir sankirta. Skaičių aibės poaibiai 14
1.3. Trupmeniniai racionalieji skaičiai 16
1.4. Laipsniai su sveikaisiais rodikliais 18
1.5. Šaknys 20
1.6. Laipsniai su trupmeniniais racionaliaisiais rodikliais ir šaknys 22
1.7. Logaritmai 24
1.8. Logaritmų savybės 26
1.9. Skaitiniai reiškiniai 28
1.10. Raidiniai reiškiniai 30

2. SINUSAI, KOSINUSAI, TANGENTAI

2.1. Posūkių kampai 44
2.2. Posūkio kampo sinusas 46
2.3. Posūkio kampo kosinusas 48
2.4. Posūkio kampo tangentas 50
2.5. Pagrindinė trigonometrinė tapatybė 52
2.6. Dar viena trikampio ploto formulė 54
2.7. Sinusų teorema 56
2.8. Kosinusų teorema 58
2.9. Įbrėžtiniai kampai 60

3. FUNKCIJOS

3.1. Tiesinės funkcijos 74
3.2. Laipsninės funkcijos 76
3.3. Šaknies funkcijos 78
3.4. Rodiklinės funkcijos 80
3.5. Logaritminės funkcijos 82
3.6. Sinuso funkcija 84
3.7. Kosinuso funkcija 86
3.8. Tangento funkcija 88

4. LYGTYS

4.1. Lygtys su trečiaisiais laipsniais 102
4.2. Lygtys su kvadratinėmis šaknimis 104
4.3. Rodiklinės lygtys 106
4.4. Logaritminės lygtys 108
4.5. Lygtys su moduliais 110
4.6. Sprendžiame sudėtingesnes lygtis 112
4.7. Lygtys su sinusais 114
4.8. Lygtys su kosinusais 116
4.9. Lygtys su tangentais 118

5. LYGČIŲ SISTEMOS

5.1. Lygtys su dviem nežinomaisiais 132
5.2. Dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemos 134
5.3. Sprendžiame tekstinius uždavinius 136
5.4. Sprendžiame geometrijos uždavinius 138

Apie vadovėlį

Vadovėlis parengtas pagal 2011 02 21 patvirtintas vidurinio ugdymo bendrąsias programas. Jis skirtas pasirinkusiems bendrąjį matematikos kursą.

Vadovėlyje yra 5 skyriai. Visų skyrių struktūra yra vienoda. Peržvelkime ją, kaip pavyzdį imdami pirmąjį skyrių.

- **Skyrius prasideda turinio atverstiniu**

Kartojame tai, ko prireiks 1 skyriuje — **Skaičiai, veiksmai, reiškiniai** — 1 skyrius

Kairiajame puslapyje yra uždaviniai, skirti anksčiau spręstiems uždaviniams pakartoti ir nagrinėtai teorijai prisiminti. Primiršti faktai ir pavyzdžiai pateikiami banguotomis linijomis apvestose srityse.

Dešiniojo puslapio viršuje yra skyriaus turinys. Kas skyriuje yra svarbiausia, galima suprasti iš pagrindinių atverstinių pavadinimų (jie yra sunumeruoti) ir puslapio apačioje esančio skyriaus įvado.

- **Toliau yra pagrindiniai atverstiniai**

1 skyrius — **1.1. Skaičių aibės** — **1.1. Uždaviniai** — 1 skyrius

Kairiuosiuose puslapiuose yra teorija. Ji pateikiama užduotimis, kurias turėtų atlikti patys mokiniai. Užduotis įveikti padės banguotomis linijomis įrėmintose srityse esantys pavyzdžiai, nurodymai ir samprotavimai. Tai, kas yra svarbiausia, surašyta lentoje.

Dešinėje yra su kairiųjų puslapių teorija susiję uždaviniai. Greta uždavinių sąlygų kai kur rasite išspręstų uždavinių pavyzdžių. Jei uždavinys išskaidytas į a), b), c), ... punktus, tai jie pradedami lengviausiu ir baigiami sunkiausiu. Jei uždavinyje yra 1), 2), ... užduotys, tai jas rekomenduojame atlikti iš eilės.

Pagrindiniai atverstiniai yra privalomi visiems mokiniams, nebent mokytojai dėl vienų ar kitų priežasčių nuspręstų kitaip...

- **Po pagrindinių yra stipresniems mokiniams skirti atverstiniai**

1 skyrius — **Apibendriname** — **Apibendriname** — 1 skyrius

Čia pateikiama pagrindiniuose atverstiniuose išdėstytos teorijos santrauka. Greta teorijos (apibrėžimo, savybės, teoremos ar formulės) už brūkšnio yra ją iliustruojantys pavyzdžiai. Kai kurių skyrių atverstiniuose „Apibendriname“ teorijos ir pavyzdžių rasite daugiau negu jų buvo pagrindiniuose atverstiniuose. Žinoma, ta papildoma teorija, kaip ir šis atverstinis, nėra privaloma visiems.

1 skyrius — **Sprendžiame** — **Sprendžiame** — 1 skyrius

Šis atverstinis skirtas mokiniams, kuriems pagrindiniuose atverstiniuose uždavinių buvo per mažai arba jie buvo per lengvi. Ko gero, mokiniai, sėkmingai įveikę šio atverstinio uždavinius, galės drąsiai bandyti laikyti valstybinį matematikos egzaminą. Paskutinis šio atverstinio uždavinys pažymėtas ženkleliu ?. Tai gali būti galvosūkis, netradicinis ar šiaip sunkesnis uždavinys.

Apie vadovėlį

1 skyrius **Besidomintiems** — Laipsnių savybių įrodymai

1 skyrius **Besidomintiems** — Šaknų savybių įrodymai

Čia pateikiami pagrindiniuose atverstiniuose išdėstytos teorijos teiginių įrodymai. Kartais čia rasite papildomos medžiagos, kuri nebuvo nagrinėta pagrindiniuose atverstiniuose, bet su jais yra susijusi. Kitaip sakant, atverstinis „Besidomintiems“ skirtas smalsesniems.

- **Skyriaus pabaigoje yra visiems mokiniams skirti uždavinių atverstiniai**

1 skyrius **Geometrijos uždaviniai** — Tiesės ir kampai

Puslapis uždavinių, susijusių su pagrindinėje mokykloje nagrinėta kuria nors geometrijos tema. Čia taip pat primenama svarbiausia tos temos teorija.

1 skyrius **Įvairūs uždaviniai** — Procentai

Puslapis uždavinių, susijusių su pagrindinėje mokykloje nagrinėta algebros, tikimybių teorijos ar kita kuria nors tema. Žinoma, vėl primenama tos temos teorija.

Šiuos uždavinius ypač rekomenduojame spręsti tiems, kurie planuoja laikyti valstybinį egzaminą.

1 skyrius **Testas**

Puslapis testinių uždavinių, susijusių su pagrindiniais atverstiniais. Sprendžiant testinius uždavinius nereikalaujama nurodyti sprendimų, pakanka pasirinkti vienintelį teisingą atsakymą iš pateiktų penkių.

1 skyrius **Pasitikriname**

Puslapis uždavinių, skirtų mokiniams pasitikrinti, o mokytojams – patikrinti, kaip pavyko pasiekti pagrindinius skyriuje keliamus tikslus. Galima sakyti, kad tai yra svarbiausi skyriaus uždaviniai. Jų atsakymus rasite vadovėlio pabaigoje.

Šis atverstinis pravers ne tik pasitikrinimui, bet ir rengiantis kontroliniam darbui.

Vadovėlio komplektą sudaro:

- vadovėlis;
- pratybų sąsiuvinis;
- savarankiškų ir kontrolinių darbų rinkiniai;
- kompiuterinės priemonės.

Vadovėlio komplektas turėtų tapti geru pagalbininku pasirinkusiems bendrąjį matematikos kursą. Sėkmės!

Prieš pradėdami nagrinėti pirmąjį skyrių, susipažinkite su 6–9 puslapiuose pateiktu įvadu.

Skaičių ir veiksmų įvairovė

Skaičiai ir veiksmai

Ankstesnėse klasėse susipažinome su įvairiais skaičiais:
- sveikaisiais;
- trupmeniniais;
- iracionaliaisiais.

Sveikųjų skaičių pavyzdžiai: $-53;\ -1;\ 0;\ 201.$
Trupmeninių skaičių pavyzdžiai: $-10{,}5;\ -\frac{1}{3};\ 2{,}01;\ 2{,}(3);\ 20\frac{3}{8}.$
Iracionaliųjų skaičių pavyzdžiai: $-5\sqrt[3]{2};\ -\sqrt{2};\ \sqrt{3};\ \pi;\ 10-\sqrt{10}.$

Su skaičiais mokėmės atlikti įvairius veiksmus:
- sudėti ir atimti;
- dauginti ir dalyti;
- kelti laipsniu ir traukti šaknį.

Skaičių 9 ir 2:
- suma yra $9+2=11$;
- skirtumas yra $9-2=7$;
- sandauga yra $9\cdot 2=18$;
- dalmuo yra $9:2=4{,}5$.

Skaičių 9 pakėlę 2-uoju laipsniu (kvadratu) gauname $9^2=81$.
Iš skaičiaus 9 ištraukę 2-ojo laipsnio (kvadratinę) šaknį gauname $\sqrt{9}=3$.

1 užduotis. Pasvarstykite, kokius simbolius vartojame rašydami skaičius ir kaip žymime veiksmus.

XI ir XII klasėse tęsime pažintį su skaičiais ir jų veiksmais.

Šiame vadovėlyje:
- mokysimės skaičių kelti laipsniu, kurio rodiklis yra ne tik sveikasis, bet ir trupmeninis, pavyzdžiui, $2^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{2^3}=\sqrt[4]{8}$;
- susipažinsime su skaičiais, kurie rašomi vartojant santrumpą „log“ (*skaitoma*: logaritmas), pavyzdžiui, $\log_2 8=3$, nes $2^3=8$;
- tęsime pažintį su skaičiais, kurie rašomi vartojant santrumpas „sin“, „cos“ ir „tg“, pavyzdžiui: $\sin 30^\circ=\frac{1}{2};\ \cos 90^\circ=0;\ \operatorname{tg}(-45^\circ)=-1$;
- nagrinėsime funkcijas, kurias galima užrašyti taip: $y=x^n,\ y=\sqrt[n]{x},\ y=a^x,\ y=\log_a x,\ y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=\operatorname{tg} x,$ čia $n\in N,\ n>1,\ a>0,\ a\neq 1$;
- spręsime lygtis bei lygčių sistemas;
- nepamiršime geometrijos, tikimybių, statistikos.

Kokios yra matematikos ištakos? Kokie skaičiai ir veiksmai atsirado pirmiausia? Kaip plėtėsi skaičiaus ir veiksmų samprata?

Sudėtis ir atimtis. Sveikieji skaičiai

Galima sakyti, kad pažintis su matematika prasideda nuo natūraliųjų skaičių ir sudėties veiksmo.

Natūraliųjų skaičių aibė žymima $\boldsymbol{N} = \{1; 2; 3; ...\}$.

Natūraliųjų skaičių suma yra natūralusis skaičius: $\underset{\boldsymbol{N}}{a} + \underset{\boldsymbol{N}}{b} = \underset{\boldsymbol{N}}{c}$.

Iš natūraliųjų skaičių sudėties kilo atimtis, o iš atimties — neigiamieji skaičiai ir skaičius nulis.

2 užduotis.

1) Iš lygybės $2 + 3 = 5$ išreikškite dėmenį 2. Kokį veiksmą atliksite?

Iš lygybės $2 + 3 = 5$ išreikškime dėmenį 3:

$$3 = 5 - 2.$$

Atimtis yra veiksmas, kuriuo iš sumos randamas dėmuo.

2) Raskite lygties sprendinį.

a) $x + 3 = 5$; b) $x + 5 = 3$; c) $x + 3 = 3$.

Kokiu veiksmu naudodamiesi gavote lygčių sprendinius? Ar visi gautieji sprendiniai yra natūralieji skaičiai?

Lygties

$x + a = b$, čia x — nežinomasis, $a, b \in \boldsymbol{N}$, sprendinys yra lygus skirtumui

$x = b - a$.

3) Kokias reikšmes gali įgyti skirtumas $b - a$, kai $a, b \in \boldsymbol{N}$?

Natūraliųjų skaičių skirtumas ne visada yra natūralusis skaičius.
Galima sakyti, kad iš atimties kilo neigiamieji sveikieji skaičiai ir skaičius nulis, o natūraliųjų skaičių aibė prasiplėtė iki sveikųjų skaičių aibės.

Sveikųjų skaičių aibė žymima $\boldsymbol{Z} = \{...; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ...\}$.

Kartais sakoma, kad sudėtis ir atimtis yra vienas kitam atvirkštiniai veiksmai. Ar teisingai atimta, galima patikrinti sudedant. Beje, atimtį galima keisti sudėtimi su atėminiui priešingu skaičiumi.

$5 - 3 = 2$, nes $2 + 3 = 5$. $\Leftrightarrow$ $5 - 3 = 5 + (-3)$.

Daugyba ir dalyba. Racionalieji skaičiai

Daugyba atsirado kaip trumpesnis vienodų dėmenų sudėties užrašas:

$$\underbrace{a+a+\cdots+a}_{n \text{ dėmenų}} = a \cdot n. \qquad 5+5+5 = 5 \cdot 3.$$

Natūraliųjų skaičių sandauga yra natūralusis skaičius: $a \cdot b = c$.
$\uparrow\ N \quad \uparrow\ N \quad \uparrow\ N$

Kaip iš sudėties kilo atimtis, taip iš daugybos — dalyba.
Kaip atimant atsirado neigiamieji skaičiai ir skaičius nulis, taip dalijant — trumpmeniniai skaičiai.

3 užduotis.

1) Iš lygybės $2 \cdot 3 = 6$ išreikškite dauginamąjį 2. Kokį veiksmą atliksite?

Iš lygybės $2 \cdot 3 = 6$ išreikškime dauginamąjį 3:

$$3 = 6 : 2.$$

Dalyba yra veiksmas, kuriuo iš sandaugos randamas dauginamasis.

2) Raskite lygties sprendinį.
a) $2 \cdot x = 6$; b) $2 \cdot x = 3$; c) $6 \cdot x = 2$.

Kokiu veiksmu naudodamiesi gavote lygčių sprendinius? Ar visi gautieji sprendiniai yra sveikieji skaičiai?

Lygties
$a \cdot x = b$, čia x — nežinomasis, $a, b \in \boldsymbol{N}$, sprendinys yra lygus dalmeniui
$x = b : a$.

3) Kokias reikšmes gali įgyti dalmuo $b : a$, kai $a, b \in \boldsymbol{N}$?

Natūraliųjų skaičių dalmuo ne visada yra sveikasis skaičius.
Galima sakyti, kad dalijant atsirado trupmeniniai skaičiai, o sveikųjų skaičių aibė prasiplėtė iki racionaliųjų skaičių aibės.
Racionalųjį skaičių galima užrašyti paprastąja trupmena $\frac{a}{b}$ $(a \in \boldsymbol{Z}, b \in \boldsymbol{N})$.
Racionaliųjų skaičių aibė žymima $\boldsymbol{Q} = \left\{\frac{a}{b},\ a \in \boldsymbol{Z},\ b \in \boldsymbol{N}\right\}$.

Kartais sakoma, kad daugyba ir dalyba yra vienas kitam atvirkštiniai veiksmai. Ar teisingai padalyta, galima patikrinti dauginant. Beje, dalybą galima keisti daugyba su dalikliui atvirkštiniu skaičiumi.

$6 : 2 = 3$, nes $3 \cdot 2 = 6$. $\Rightarrow$ $6 : 2 = 6 \cdot \frac{1}{2}$.

Laipsnis ir šaknis. Realieji skaičiai

Laipsnis atsirado kaip trumpesnis vienodų dauginamųjų sandaugos užrašas:

$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ dauginamųjų}} = a^n.$ $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3.$

Natūraliojo skaičiaus laipsnis su natūraliuoju rodikliu yra natūralusis skaičius: $a^{\overset{\uparrow}{b}} = c.$ ($b \in N$, $c \in N$)

Kaip iš sudėties kilo atimtis, o iš daugybos — dalyba, taip iš laipsnio kilo šaknis.

4 užduotis.

1) Iš lygybės $3^2 = 9$ išreikškite laipsnio pagrindą 3. Kokį veiksmą naudojote?

Iš lygybės $2^3 = 8$ išreikškime laipsnio pagrindą 2:
$2 = \sqrt[3]{8}$.
Trečiojo laipsnio šaknies traukimas yra veiksmas, kuriuo iš laipsnio su rodikliu, lygiu 3, randamas laipsnio pagrindas.

2) Raskite lygties sprendinius. a) $x^2 = 9$; b) $x^2 = 8$; c) $x^3 = 8$; d) $x^3 = 9$.

Kokiais veiksmais naudodamiesi gavote lygčių sprendinius? Ar visi gautieji sprendiniai yra racionalieji skaičiai?

Lygčių $x^2 = a$ ir $x^3 = a$ ($a \in N$) sprendinius galima rasti traukiant šaknis:
$x^2 = a$, $x_1 = \sqrt{a}$, $x_2 = -\sqrt{a}$;
$x^3 = a$, $x = \sqrt[3]{a}$.

3) Kokias reikšmes gali įgyti šaknys $\sqrt{a}$ ir $\sqrt[3]{a}$, kai $a \in N$?

Šaknis iš natūraliojo skaičiaus ne visada yra natūralusis ar racionalusis skaičius.
Galima sakyti, kad traukiant šaknį atsirado iracionalieji skaičiai.
Iracionaliojo skaičiaus negalima užrašyti paprastąja trupmena $\frac{a}{b}$ ($a \in Z$, $b \in N$).
Iracionaliųjų skaičių aibė žymima $I = \left\{a \neq \frac{b}{c}, b \in Z, c \in N\right\}$.
Racionalieji ir iracionalieji skaičiai sudaro realiųjų skaičių aibę. Ji žymima $R = Q \cup I$.

Laipsnis ir logaritmas. Dar daugiau iracionaliųjų skaičių

Iš lygybės, pavyzdžiui, $2^3 = 8$, išreikšdami laipsnio pagrindą 2, rašome ženklą $\sqrt{}$ (šaknis): $2 = \sqrt[3]{8}$.
O iš lygybės $2^3 = 8$ išreikšdami laipsnio rodiklį 3, vartojame santrumpą „log“ (logaritmas): $3 = \log_2 8$.

5 užduotis.

1) Vartodami logaritmą, iš lygybės $3^2 = 9$ išreikškite laipsnio rodiklį.

2) Vartodami logaritmą, raskite lygties sprendinį. a) $3^x = 9$; b) $2^x = 8$; c) $3^x = 10$; d) $2^x = 9$.

Lygties $4^x = 5$ sprendinys $x = \log_4 5$ yra iracionalusis skaičius.
Nenusiminkite, jei šios užduoties jums nepavyko atlikti.
Tai nagrinėsime 1 skyriuje. Sėkmės!

Kartojame tai, ko prireiks 1 skyriuje

1. Iš skaičių 7; 0; -10; $\sqrt{2}$; $\frac{8}{3}$; $-2{,}4$; π; $-\sqrt{99}$ išrinkite ir surašykite:
a) natūraliuosius skaičius; b) sveikuosius skaičius; c) iracionaliuosius skaičius;
d) neigiamuosius racionaliuosius skaičius; e) didžiausią skaičių; f) mažiausią skaičių.

Natūralieji skaičiai: $1; 2; 3; \ldots$. *Sveikieji skaičiai*: $\ldots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots$.
Racionalieji skaičiai yra tokie, kuriuos galima užrašyti trupmena $\frac{a}{b}$; čia a — sveikasis skaičius, b — natūralusis skaičius.
Iracionalieji skaičiai yra tokie, kurių negalima užrašyti trupmena $\frac{a}{b}$; čia a — sveikasis skaičius, b — natūralusis skaičius.

2. Raskite skaičių sumą, skirtumą, sandaugą ir dalmenį.
a) 5 ir -4; b) $\frac{1}{2}$ ir $\frac{3}{4}$; c) $-1{,}2$ ir $0{,}8$; d) $2\frac{1}{2}$ ir $-3\frac{2}{3}$; e) $-\frac{2}{7}$ ir $0{,}3$; f) $-1\frac{1}{3}$ ir $-2{,}5$.

3. Apskaičiuokite skaitinio reiškinio reikšmę.
a) $-56 : 8 + (-1)$; b) $-4 + 3 \cdot (-2) - 2$; c) $-3 \cdot \big(5 + 2 - (-9)\big)$; d) $4 - (-2 - 3) \cdot (-4) - 1 \cdot 0$.

4. Duotas reiškinys $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$.
1) Apskaičiuokite reiškinio reikšmę, kai $x = 0$; $x = -10$; $x = 10$.

$f(1) = 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1 = 3 \cdot 1 + 4 + 1 = 8.$

2) Apskaičiuokite kintamojo x reikšmes, su kuriomis reiškinio reikšmė lygi 1; 0; -1.

$f(x) = 8$, kai $3x^2 + 4x + 1 = 8$, $\Rightarrow$ $3x^2 + 4x - 7 = 0$, $\Rightarrow$ $x_1 = -2\frac{1}{3}$, $x_2 = 1$.

5. Apskaičiuokite.
a) 2^3; $(-2)^3$; -2^3; 2^{-3}; $(-2)^{-3}$; -2^{-3}; b) 2^4; $(-2)^4$; -2^4; 2^{-4}; $(-2)^{-4}$; -2^{-4};
c) $(-1)^4$; $(-1)^5$; -1^4; -1^5; $(-1)^{-4}$; $(-1)^{-5}$; -1^{-4}; d) 0^3; 0^4; 2^0; $(-2)^0$; -2^0.

Kai laipsnio rodiklis yra:
- neigiamas sveikasis skaičius, tai $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; čia $a \neq 0$;
- lygus nuliui, tai $a^0 = 1$; čia $a \neq 0$.

$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$;
$(-5)^{-3} = \frac{1}{(-5)^3} = \frac{1}{-125} = -\frac{1}{125}$;
$-5^{-3} = -1 \cdot 5^{-3} = -1 \cdot \frac{1}{5^3} = -1 \cdot \frac{1}{125} = -\frac{1}{125}$;
$5^0 = 1$; $(-5)^0 = 1$; $-5^0 = -1 \cdot 5^0 = -1 \cdot 1 = -1$.

6. Raskite skaičius, kuriuos pakėlę antruoju laipsniu gauname:
a) 4; b) $\frac{1}{4}$; c) 1; d) 0; e) 25; f) $\frac{4}{25}$; g) $6\frac{1}{4}$; h) -4.

Yra du skaičiai, kuriuos pakėlę kvadratu gauname 100: $10^2 = 100$ ir $(-10)^2 = 100$.

7. Raskite skaičių, kurį pakėlę trečiuoju laipsniu gauname:
a) 27; b) $\frac{1}{27}$; c) 1; d) 0; e) 8; f) $\frac{8}{27}$; g) $3\frac{3}{8}$; h) -27; i) $-\frac{64}{125}$; j) -1.

8. Raskite kvadratinės šaknies reikšmę.
a) $\sqrt{9}$; b) $\sqrt{\frac{1}{9}}$; c) $\sqrt{1}$; d) $\sqrt{0}$; e) $\sqrt{36}$; f) $\sqrt{100}$; g) $\sqrt{0{,}01}$; h) $\sqrt{\frac{4}{25}}$; i) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$.

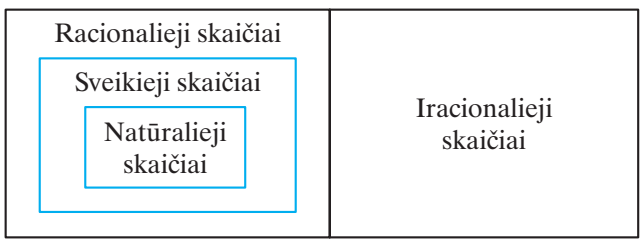
$\sqrt{a} = b$, kai $b^2 = a$ ir $b \geqslant 0$, $a \geqslant 0$. $\sqrt{49} = 7$, nes $7^2 = 49$ ir $7 > 0$.

Skaičiai, veiksmai, reiškiniai

1 skyrius

1.1. Skaičių aibės 12
1.2. Skaičių aibių sąjunga ir sankirta. Skaičių aibės poaibiai 14
1.3. Trupmeniniai racionalieji skaičiai 16
1.4. Laipsniai su sveikaisiais rodikliais 18
1.5. Šaknys 20
1.6. Laipsniai su trupmeniniais racionaliaisiais rodikliais ir šaknys 22
1.7. Logaritmai 24
1.8. Logaritmų savybės 26
1.9. Skaitiniai reiškiniai 28
1.10. Raidiniai reiškiniai 30
Apibendriname 32
Sprendžiame 34
Besidomintiems 36
Laipsnių, šaknų ir logaritmų savybių įrodymai
Geometrijos uždaviniai. Tiesės ir kampai 38
Įvairūs uždaviniai. Procentai 39
Testas 40
Pasitikriname 41
Kartojame tai, ko prireiks 2 skyriuje 42

Mokykloje susipažįstama su realiaisiais skaičiais. Kiekvienas realusis skaičius yra arba racionalusis, arba iracionalusis. Realiųjų skaičių aibės struktūrą galima pavaizduoti taip:



Šiame skyriuje susipažinsime su skaičiais, kurie rašomi:

- laipsniu su trupmeniniu rodikliu, t. y.

$$a^{\frac{m}{n}};$$

- vartojant ženklą $\sqrt{\ }$, t. y.

$$\sqrt[n]{a};$$

- vartojant ženklą log, t. y.

$$\log_a b.$$

1.1. Skaičių aibės

Skaičiai pagal tam tikras savybes yra suskirstyti į grupes — ***skaičių aibes***.
Įprasta aibes žymėti didžiosiomis raidėmis, o aibės elementus (skaičius) rašyti riestiniuose skliaustuose.
Pavyzdžiui, natūraliųjų skaičių aibė yra $N = \{1; 2; 3; ...\}$.
Šiame atverstinyje plėsime su skaičių aibėmis susijusias žinias, mokysimės vartoti aibių teorijos simbolius ir žymenis.



1 užduotis. Iš skaičių

$$-3; \quad -\sqrt{3}; \quad -1\frac{2}{3}; \quad 0; \quad \sqrt{2}; \quad \pi; \quad 3{,}2; \quad 4; \quad 13$$

išrinkite ir surašykite:
a) natūraliuosius skaičius; b) sveikuosius skaičius; c) racionaliuosius skaičius;
d) iracionaliuosius skaičius; e) realiuosius skaičius.

Natūraliųjų skaičių aibė $N = \{1; 2; 3; ...\}$.
Sveikųjų skaičių aibė $Z = \{...; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ...\}$.
Racionaliųjų skaičių aibė $Q = \left\{\frac{a}{b}, a \in Z, b \in N\right\}$.
Iracionaliųjų skaičių aibė $I = \left\{a \neq \frac{b}{c}, b \in Z, c \in N\right\}$.
Realiųjų skaičių aibė $R = (-\infty; +\infty)$.

Lentoje surašytas aibes susitarta žymėti būtent tomis raidėmis.
Dažniausiai šios raidės rašomos pusjuodžiu arba simetriniu šriftu: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}, \mathbb{R}$.

2 užduotis.
1) Užrašykite du skaičius, priklausančius:
a) natūraliųjų skaičių aibei N; b) sveikųjų skaičių aibei Z; c) racionaliųjų skaičių aibei Q;
d) iracionaliųjų skaičių aibei I; e) realiųjų skaičių aibei R.

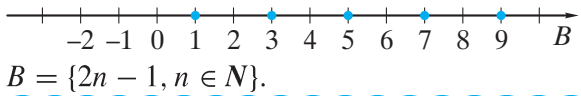
Jei skaičius a priklauso aibei A, tai rašoma $a \in A$.
Jei skaičius b nepriklauso aibei A, tai rašoma $b \notin A$.

$3 \in N$, $\quad -5\frac{1}{3} \in Q$,
$-2 \notin N$, $\quad \sqrt{2} \notin Q$.

2) Užrašykite du skaičius, nepriklausančius:
a) natūraliųjų skaičių aibei; b) iracionaliųjų skaičių aibei.

3 užduotis.
1) Užrašykite keletą lyginių skaičių.
2) Lyginių skaičių aibę A nusakykite:
a) žodžiais; b) surašydami jos elementus; c) vaizduodami jos skaičius skaičių tiesėje; d) reiškiniu.

Skaičių aibė gali būti nusakyta:
- žodžiais;
- surašant jos skaičius ar skaičių intervalus;
- vaizduojant jos skaičius skaičių tiesėje;
- reiškiniu, kurio reikšmės yra tos aibės skaičiai.

Nusakykime nelyginių skaičių aibę B:
- B = {Natūralieji skaičiai, kurie nesidalija iš 2};
- $B = \{1; 3; 5; 7; ...\}$;
- 

- $B = \{2n - 1, n \in N\}$.

9. Duoti skaičiai: -4; 16; 0; -7; $1\frac{1}{2}$; $-3{,}2$.
1) Kurie šių skaičių priklauso:
a) teigiamųjų skaičių aibei C? b) neigiamųjų skaičių aibei D?
2) Kuris šių skaičių nepriklauso nei aibei C, nei aibei D?
Atsakymus užrašykite vartodami žymenis $\in$ ir $\notin$.

10. Žodžiais nusakytą aibę užrašykite nurodydami jos elementus.
a) Teigiamieji sveikieji skaičiai, mažesni už 6.
b) Neigiamieji sveikieji skaičiai, ne mažesni už -6.
c) Lyginiai skaičiai, didesni už 20, bet mažesni už 30.
d) Nelyginiai skaičiai, ne didesni už 15.

11. Kiek elementų turi aibė? Nurodykite (jei įmanoma) jų mažiausiąjį ir didžiausiąjį.
a) $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$; b) $B = (0; 10]$;
c) $C = \{$Lygties $x^2 = -4$ sprendiniai$\}$; d) $D = \{n^2, n \in N\}$.

Aibė, neturinti nė vieno elemento, vadinama *tuščiąja aibe* (žymima $\varnothing$).
Aibė, turinti be galo daug elementų, vadinama *begalinė aibe*.
Aibė, turinti baigtinį skaičių elementų, vadinama *baigtinė aibe*.

Aibė $E = \{3n, n \in N\}$ turi be galo daug elementų: $E = \{3; 6; 9; 12; ...\}$.
Mažiausias šios aibės elementas yra 3, didžiausio elemento aibė E neturi.

12. Raskite lygties sprendinių aibę.

a) $x - 2 = 0$;	b) $3x + 12 = 12$;	c) $-x + 9 = -1$;	d) $4x = 5x - 1$;
e) $x^2 = 0$;	f) $x^2 = 9$;	g) $x^2 = -2$;	h) $x^2 = 5$;
i) $x^2 + x = 0$;	j) $5x^2 + 10x = 0$;	k) $-7x^2 + x = 0$;	l) $-3x^2 - 9x = 0$;
m) $x^2 - 2x + 1 = 0$;	n) $x^2 - 2x - 3 = 0$;	o) $x^2 - 2x + 3 = 0$;	p) $x^2 + x - 1 = 0$;
r) $\sqrt{x} = 3$;	s) $\sqrt{x} = -3$;	t) $\frac{x^2+2x}{x-1} = 0$;	u) $\frac{x^2-2x}{x-2} = 0$.

Lygties $x^2 - 5x = 0$ sprendinių aibė yra $\{0; 5\}$.
Lygties $x^2 = -5$ sprendinių aibė yra tuščia, t. y. $\varnothing$.

13. Sugalvokite lygtį, kurios sprendinių aibė būtų: a) $\{2\}$; b) $\{-3\}$; c) $\{-2; 2\}$; d) $\{0; 3\}$; e) $\varnothing$.

14. Raskite nelygybės sprendinių aibę (intervalą) ir pavaizduokite ją skaičių tiesėje.
a) $x - 2 < 0$; b) $2x \geqslant 6$; c) $-x - 12 \leqslant 0$; d) $-5x + 11 > 2$; e) $-\frac{x}{3} + 1 \leqslant \frac{2}{3}$.

15. Raskite dvigubosios nelygybės sprendinių aibę ir pavaizduokite ją skaičių tiesėje.
a) $3 < x \leqslant 8$; b) $-4 \leqslant 2x \leqslant 10$; c) $-1 \leqslant x + 2 < 2$; d) $-6 < -2x + 4 < 6$.

16. Sugalvokite nelygybę, kurios sprendinių aibė būtų: a) $[2; +\infty)$; b) $(-\infty; 3)$; c) $\varnothing$.

17. Užrašykite skaičiaus daliklių aibę D, nurodydami jos elementus, ir kartotinių aibę K reiškiniu.
a) 12; b) 18; c) 23; d) 31.

Skaičiaus 6 daliklių aibė $D = \{1; 2; 3; 6\}$,
kartotinių aibė $K = \{6; 12; 18; 24; ...\} = \{6n, n \in N\}$.

18. Kam lygi tikimybė, kad atsitiktinai paimtas aibės:
a) $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ elementas bus lyginis skaičius?
P(aibės A elementas — nelyginis) $= \frac{3}{5}$.
b) $B = \{-5; -4; -3; 0; 1; 2\}$ elementas bus neneigiamas skaičius?
c) $C = \left\{2; \sqrt{2}; 3; \sqrt{3}; 0{,}5; \frac{1}{2}\right\}$ elementas bus racionalusis skaičius?

1.2. Skaičių aibių sąjunga ir sankirta. Skaičių aibės poaibiai

Šiame atverstinyje mokysimės atlikti veiksmus su skaičių aibėmis ir rasti skaičių aibių poaibius.



Užduotis. Nagrinėkime dvi skaičių aibes: $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ ir $B = \{4; 5; 6; 7\}$.

1) Iš aibių A ir B *visų elementų* sudarykite aibę C.

Aibė C, sudaryta iš visų elementų, kurie įeina arba į aibę A, arba į aibę B, vadinama ***aibių*** A ir B ***sąjunga***.
Rašoma: $A \cup B = C$. *Skaitoma*: Aibių A ir B sąjunga yra aibė C.

Raskime aibių $A = \{10; 11; 12\}$ ir $B = \{0; 10; 20\}$ sąjungą.

Ją galima gauti prie aibės A elementų prijungus tuos aibės B elementus, kurie neįeina į A. Akivaizdu, kad prie aibės A elementų reikia prijungti skaičius 0 ir 20. Taigi

$C = A \cup B = \{10; 11; 12\} \cup \{0; 10; 20\} = \{0; 10; 11; 12; 20\}$.

2) Iš aibių A ir B *visų bendrųjų elementų* sudarykite aibę D.

Aibė D, sudaryta iš visų elementų, kurie įeina ir į aibę A, ir į aibę B, vadinama ***aibių*** A ir B ***sankirta***.
Rašoma: $A \cap B = D$. *Skaitoma*: Aibių A ir B sankirta yra aibė D.

Raskime aibių $A = \{10; 11; 12\}$ ir $B = \{0; 10; 20\}$ sankirtą.

Matome, kad ir aibėje A, ir aibėje B yra tik skaičius 10. Taigi

$D = A \cap B = \{10; 11; 12\} \cap \{0; 10; 20\} = \{10\}$.

3) Iš aibės A *kurių nors elementų* sudarykite aibę E.

Aibė E, sudaryta iš kurių nors aibės A elementų, vadinama ***aibės*** A ***poaibiu***.
Rašoma: $E \subset A$. *Skaitoma*: Aibė E yra aibės A poaibis.
Tuščioji aibė ir pati aibė A laikoma aibės A poaibiais.

Raskime aibės $A = \{10; 11; 12\}$ keletą poaibių, pavyzdžiui:
$\{11\} \subset \{10; 11; 12\}$, $\{10; 12\} \subset \{10; 11; 12\}$, $\{10; 11; 12\} \subset \{10; 11; 12\}$, $\varnothing \subset \{10; 11; 12\}$.

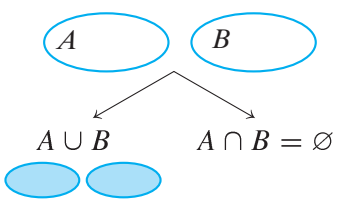
4) Raskite: a) $E \cup B$; b) $E \cap B$; c) $E \cup D$; d) $E \cap D$; e) $E \cup C$; f) $E \cap C$.

5) Ar aibė D yra poaibis aibės: a) A? b) B? c) C? d) E?

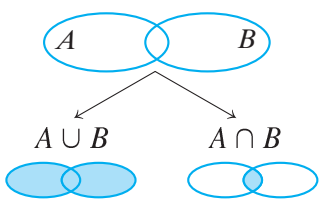
$\cup$ — aibių sąjungos ženklas, $\{0; 1; 2\} \cup \{1; 3\} = \{0; 1; 2; 3\}$;
$\cap$ — aibių sankirtos ženklas, $\{0; 1; 2\} \cap \{1; 3\} = \{1\}$;
$\subset$ — aibės poaibio ženklas. $\{2\} \subset \{0; 1; 2\}$, $\{2\} \not\subset \{1; 3\}$.

Aibes ir veiksmus su jomis kartais patogu vaizduoti diagramomis. Pavyzdžiui:

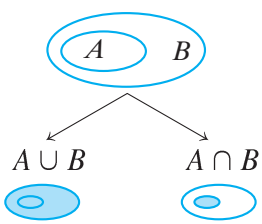
1) Aibės A ir B neturi bendrų elementų.



2) Aibės A ir B turi bendrų elementų.



3) Visi aibės A elementai yra ir aibės B elementai ($A \subset B$).



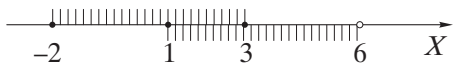
1.2. Uždaviniai

19. Raskite aibių $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ ir $B = \{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$:
a) sąjungą $A \cup B$; b) sankirtą $A \cap B$.

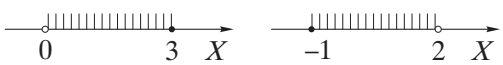
20. Užrašykite kokias nors aibes A ir B, jei jų:
a) sankirta $A \cap B = \{2; 3\}$; b) sankirta $A \cap B = \varnothing$;
c) sąjunga $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$; d) sąjunga $A \cup B = \{-5; 0; 5\}$;
e) sąjunga $A \cup B = \{3; 4; 5; 6\}$, o sankirta $A \cap B = \{4\}$;
f) sąjunga $A \cup B = \{3; 4; 5; 6\}$, o sankirta $A \cap B = \{3; 6\}$;
g) sąjunga $A \cup B = \{3; 4; 5; 6\}$, o sankirta $A \cap B = \{3; 4; 5\}$.

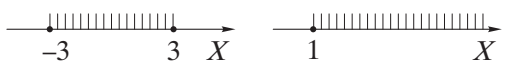
21. Raskite aibių (intervalų) A ir B sąjungą ir sankirtą, jei:
a) $A = [-1; 2]$, $B = [0; 3)$; b) $A = [-5; 5)$, $B = (-10; 0]$; c) $A = [-10; 10]$, $B = (0; 4)$;
d) $A = (-7; 13]$, $B = (0; +\infty)$; e) $A = (-\infty; 0]$, $B = [0; 5)$; f) $A = (-\infty; +\infty)$, $B = [-1; 1)$;
g) $A = [-5; -1)$, $B = (1; 5]$; h) $A = (-2; -1)$, $B = [-1; 2)$; i) $A = \left(-10; \frac{3}{2}\right]$, $B = \left(2{,}5; \sqrt{10}\right)$.

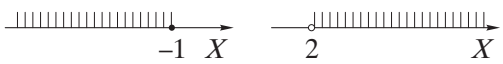
Aibių $A = [-2; 3]$ ir $B = [1; 6)$:
- sąjunga $A \cup B = [-2; 6)$;
- sankirta $A \cap B = [1; 3]$.

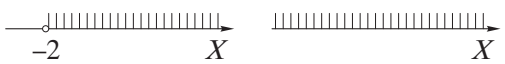


22. Skaičių tiesėse pažymėti du intervalai. Šiuos intervalus pažymėkite vienoje skaičių tiesėje ir raskite jų sąjungą ir sankirtą. Atsakymus užrašykite intervalais.

a)


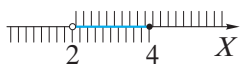
b)


c)


d)


23. Skaičių tiesėje pažymėkite sistemos abiejų nelygybių sprendinius. Užrašykite intervalu nelygybių sistemos sprendinių aibę.

a) $\begin{cases} x - 2 < 3, \\ 2x + 3 > 7; \end{cases}$ b) $\begin{cases} -4x < 12, \\ 3x \geqslant 3; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x \leqslant -10, \\ -\frac{3}{4}x < 0; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x \leqslant 2x + 18, \\ 1 - x \leqslant -5; \end{cases}$ e) $\begin{cases} 0{,}5x > 1\frac{1}{2}, \\ -2{,}1x - 1 > -11{,}5. \end{cases}$

$\begin{cases} x + 4 > 6, \\ -2x - 3 \geqslant -11; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2, \\ -2x \geqslant -8; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2, \\ x \leqslant 4; \end{cases} \Rightarrow$


Atsakymas. $x \in (2; 4]$.

24. Užrašykite kokią nors dviejų nelygybių su vienu nežinomuoju x sistemą, kurios sprendiniai būtų aibė:
a) $[-5; 2]$; b) $(0; 3)$; c) $(-2; 4]$; d) $\{5\}$; e) $\varnothing$.

25. Raskite dvigubosios nelygybės sprendinių aibę. Nurodykite jos poaibį, kurį sudaro šios aibės visi natūralieji skaičiai.
a) $-3 < x - 2 < 5$; b) $-3 \leqslant 2x < 7$; c) $-10 < 2x - 2 \leqslant 0$; d) $5 < -2x + 4 < 10$.

26. Paaiškinkite, kodėl išvardyti teiginiai yra teisingi.
1) Natūraliųjų skaičių aibė yra sveikųjų skaičių aibės poaibis: $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$.
2) Sveikųjų skaičių aibė yra racionaliųjų skaičių aibės poaibis: $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$.
3) Racionaliųjų skaičių aibė yra realiųjų skaičių aibės poaibis: $\boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$.
4) Iracionaliųjų skaičių aibė yra realiųjų skaičių aibės poaibis: $\boldsymbol{I} \subset \boldsymbol{R}$.
5) Iracionaliųjų ir racionaliųjų skaičių aibių sąjunga yra realiųjų skaičių aibė: $\boldsymbol{I} \cup \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{R}$.
6) Iracionaliųjų ir racionaliųjų skaičių aibių sankirta yra tuščia aibė: $\boldsymbol{I} \cap \boldsymbol{Q} = \varnothing$.

1.3. Trupmeniniai racionalieji skaičiai

Šiame atverstinyje prisiminsime:
- su trupmeniniais racionaliaisiais skaičiais susijusias sąvokas;
- kaip siejasi paprastosios trupmenos, dešimtainės trupmenos ir procentai;
- kaip sudedami, atimami, dauginami ir dalijami trupmeniniai racionalieji skaičiai.

1 užduotis.

1) Iš trupmeninių skaičių $1\frac{3}{4}$; $-\frac{5}{6}$; $-3,(2)$; $\frac{7}{4}$; $2,3$; $-3\frac{4}{7}$; $-\frac{3}{2}$; $6,02$; $2,(3)$; $\frac{3}{5}$ išrinkite ir surašykite:
a) dešimtaines trupmenas; b) paprastąsias trupmenas; c) mišriuosius skaičius.

$-2,5$; $0,02$; $3,0(6)$; $5,(3)$ — dešimtainės trupmenos;

$-\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{2}$; $\frac{7}{3}$; $\frac{5}{2}$ — paprastosios trupmenos;

$-2\frac{1}{4}$; $-1\frac{2}{3}$; $1\frac{1}{2}$; $3\frac{3}{5}$ — mišrieji skaičiai.

Dešimtainė trupmena — skaičius su kableliu.

Paprastoji trupmena — $\frac{a}{b}$ ($a \in \mathbf{Z}$, $b \in N$); a — skaitiklis, b — vardiklis.

Mišrusis skaičius — $A\frac{a}{b}$ ($A \in \mathbf{Z}$, $A \neq 0$; $a, b \in N$, $a < b$); A — sveikoji dalis, $\frac{a}{b}$ — trupmeninė dalis.

2) Kurios išrinktosios dešimtainės trupmenos yra: a) baigtinės? b) begalinės?

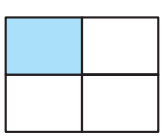
Baigtinė dešimtainė trupmena — skaičius, kuriame po kablelio yra baigtinis skaičius skaitmenų.
Pavyzdžiui: $-3,2$; $5,0001$; $100,25$.

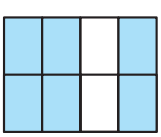
Begalinė dešimtainė trupmena — skaičius, kuriame po kablelio yra be galo daug skaitmenų.
Jei po kablelio esantys vienas ar keli skaitmenys nuolat pasikartoja ta pačia tvarka, tai juos galima suskliausti. Tokios dešimtainės trupmenos vadinamos *periodinėmis*.
Pavyzdžiui: $5,(3) = 5,333...$; $-2,(34) = -2,343434...$; $0,1(2) = 0,1222...$.

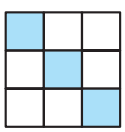
3) Kurios išrinktosios paprastosios trupmenos yra: a) taisyklingosios? b) netaisyklingosios?

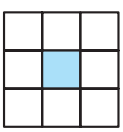
Paprastoji trupmena $\frac{a}{b}$ ($a \in \mathbf{Z}$, $b \in N$) vadinama:
taisyklingąja, kai $|a| < b$; *netaisyklingąja*, kai $|a| \geqslant b$.
Pavyzdžiui: $-\frac{2}{3}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{-3}{5}$ — taisyklingosios trupmenos; $-\frac{7}{5}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{-5}{3}$ — netaisyklingosios trupmenos.

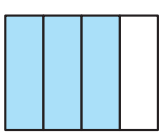
2 užduotis. Stačiakampis padalytas į lygias dalis. Kuri stačiakampio dalis nuspalvinta? Atsakymą parašykite paprastąja trupmena; dešimtaine trupmena; procentais.

a) 

b) 

c) 

d) 



Nuspalvinta $\frac{3}{4}$, arba $0,75$, arba $75\,\%$ stačiakampio.

$1\,\%$ dydžio atitinka $\frac{1}{100} = 0,01$ šio dydžio;

$a\,\%$ dydžio atitinka $\frac{a}{100} = 0,01a$ šio dydžio.

1.3. Uždaviniai

27. Kiekvieną iš skaičių 3; 10; −7; 1; 0 užrašykite:
a) dešimtaine trumpena; b) paprastąja trumpena, kurios vardiklis būtų lygus 1; 2; 5.

$5 = 5{,}0 = 5{,}00 = 5{,}000 = \ldots$ $5 = \frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{15}{3} = \ldots$

28. Paprastąją trumpeną užrašykite jai lygia dešimtaine trumpena.
a) $\frac{1}{2}$; b) $-\frac{3}{4}$; c) $\frac{-6}{5}$; d) $\frac{8}{3}$; e) $-\frac{5}{6}$; f) $\frac{-41}{2}$; g) $\frac{7}{10}$; h) $\frac{12}{100}$; i) $-\frac{29}{10}$; j) $\frac{-133}{10\,000}$.

$\frac{a}{b} = a : b.$ $\frac{3}{5} = 3 : 5 = 0{,}6;$ $-\frac{5}{9} = -5 : 9 = -0{,}555\ldots = -0{,}(5).$ $\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}.$

29. Netaisyklingąją trumpeną užrašykite jai lygiu mišriuoju skaičiumi.
a) $\frac{5}{3}$; b) $\frac{8}{7}$; c) $\frac{21}{4}$; d) $-\frac{11}{3}$; e) $-\frac{7}{2}$; f) $-\frac{30}{13}$; g) $\frac{-15}{2}$; h) $\frac{-23}{3}$; i) $\frac{-77}{10}$.

$-\frac{7}{5} = -1\frac{2}{5}.$

30. Mišrųjį skaičių užrašykite jam lygia netaisyklingąja trumpena.
a) $2\frac{1}{3}$; b) $5\frac{3}{4}$; c) $10\frac{1}{6}$; d) $15\frac{7}{8}$; e) $-1\frac{4}{5}$; f) $-2\frac{3}{5}$; g) $-20\frac{3}{4}$; h) $-16\frac{8}{9}$.

$3\frac{1}{2} = \frac{3\cdot 2+1}{2} = \frac{7}{2};$ $-2\frac{3}{4} = -\frac{2\cdot 4+3}{4} = -\frac{11}{4}.$

31. Baigtinę dešimtainę trumpeną užrašykite jai lygia paprastąja trumpena.
a) 0,5; b) 1,2; c) 5,13; d) 20,15; e) −3,1; f) −10,4; g) −15,25; h) −100,02.

$5{,}04 = 5\frac{4}{100} = 5\frac{1}{25} = \frac{5\cdot 25+1}{25} = \frac{126}{25};$ $-2{,}1 = -2\frac{1}{10} = -\frac{2\cdot 10+1}{10} = -\frac{21}{10}.$

32. Kiek procentų atitinka nurodyta skaičiaus dalis?
a) 0,04; b) 0,37; c) 2,01; d) 0,058; e) $\frac{7}{100}$; f) $\frac{3}{10}$; g) $\frac{11}{25}$; h) $\frac{9}{4}$.

33. Procentais nurodytą skaičiaus dalį užrašykite dešimtaine ir paprastąja trumpenomis.
a) 9 %; b) 30 %; c) 75 %; d) 107 %; e) 300 %; f) 0,5 %; g) 20,3 %.

34. Dabar yra devinta valanda vakaro.
a) Kuri paros dalis liko? b) Kuri paros dalis praėjo?
Atsakymus užrašykite paprastąja trumpena; dešimtaine trumpena; procentais.

35. Atlikite veiksmus (be skaičiuotuvo) su paprastosiomis trumpenomis ir mišriaisiais skaičiais.

a) $\frac{1}{2} + \frac{7}{2}$; b) $-\frac{3}{5} + \frac{4}{5}$; c) $-\frac{2}{7} + \left(-\frac{5}{7}\right)$; d) $\frac{3}{10} + \left(-\frac{3}{10}\right)$;
e) $\frac{1}{2} - \frac{7}{2}$; f) $-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}$; g) $-\frac{2}{7} - \left(-\frac{5}{7}\right)$; h) $\frac{3}{10} - \left(-\frac{3}{10}\right)$;
i) $\frac{1}{2} + \frac{7}{4}$; j) $-\frac{3}{5} + \frac{1}{3}$; k) $-\frac{2}{7} - \left(-\frac{7}{2}\right)$; l) $\frac{3}{10} - \left(-\frac{11}{15}\right)$;
m) $2\frac{1}{2} + \frac{3}{2}$; n) $-2\frac{3}{5} - \frac{1}{3}$; o) $-5\frac{2}{7} - \left(-3\frac{3}{4}\right)$; p) $\frac{1}{10} - \left(-1\frac{2}{5}\right)$;
r) $\frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$; s) $-\frac{2}{7} \cdot \left(-\frac{14}{3}\right)$; t) $-\frac{4}{5} : \frac{24}{15}$; u) $\frac{2}{3} : \frac{5}{7}$;
v) $2\frac{3}{5} \cdot \left(-1\frac{1}{2}\right)$; z) $-10\frac{3}{4} : \left(-2\frac{1}{2}\right)$; q) $-\frac{3}{4} : 1\frac{1}{3}$; w) $5\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{7}$.

$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b};$ $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd};$ $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd};$ $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$

36. Atlikite veiksmus (be skaičiuotuvo) su dešimtainėmis trumpenomis.

a) 0,5 + 2,23; b) −2,1 + 1,3; c) −7,05 + (−2,95); d) 2,34 + (−3,4);
e) 0,5 − 2,23; f) −2,1 − 1,3; g) −7,05 − (−2,95); h) 2,34 − (−3,7);
i) 0,5 · 2,23; j) −2,1 · 1,3; k) −7,05 · (−2,95); l) 2,34 · (−3,5);
m) 0,5 : 2,23; n) −2,1 : 1,3; o) −7,05 : (−2,95); p) 2,34 : (−0,6).

1.4. Laipsniai su sveikaisiais rodikliais

Šiame atverstinyje prisiminsime laipsnių su sveikaisiais rodikliais apibrėžimus ir savybes.
a^n — laipsnis; a — laipsnio pagrindas, n — laipsnio rodiklis.



1 užduotis. Apskaičiuokite laipsnio su natūraliuoju rodikliu reikšmę.
a) 2^3; b) 3^4; c) $(-2)^3$; d) $(-3)^4$.

2 užduotis. Apskaičiuokite laipsnio su neigiamuoju sveikuoju rodikliu reikšmę.
a) 2^{-3}; b) 3^{-4}; c) $(-2)^{-3}$; d) $(-3)^{-4}$.

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ dauginamųjų}}$, kai $n \in \boldsymbol{N}$; $\quad 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, kai $n \in \boldsymbol{N}$, $a \neq 0$; $\quad 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

$a^0 = 1$, kai $a \neq 0$; $\quad 2^0 = 1$.

Laipsnių su sveikaisiais rodikliais savybės:

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$; $\quad a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, kai $a \neq 0$; $\quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}$;

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$; $\quad a^n : b^n = \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$, kai $b \neq 0$.

Šių savybių įrodymai yra atverstinyje „Besidomintiems“ (žr. p. 36–37).

3 užduotis.
1) Perskaitykite aukščiau surašytas laipsnių savybes ir pateikite jas iliustruojančių skaitinių pavyzdžių.
2) Remdamiesi laipsnių savybėmis, apskaičiuokite skaitinio reiškinio reikšmę.
a) $2^3 \cdot 2^{-2}$; b) $2^3 : 2^{-2}$; c) $\left(2^3\right)^{-2}$; d) $2^0 : 2^4$; e) $5^3 \cdot 2^3$; f) $60^4 : 20^4$; g) $4^{-3} \cdot 4^4 : 4^{-2}$.

Kodėl $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ir $a^0 = 1$?

Iš kur kilo laipsnio su neigiamuoju ir nuliniu rodikliais apibrėžimai? Šiuos apibrėžimus galima „atrasti“, pavyzdžiui, iš tokių lygybių:

$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ $\quad :2$
$2^2 = 2 \cdot 2$ $\quad :2$
$2^1 = 2$ $\quad :2$
$2^0 = 1$ $\quad :2$
$2^{-1} = \frac{1}{2}$ $\quad :2$
$2^{-2} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2^2}$ $\quad :2$
$2^{-3} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2^3}$

Kai $a = 0$, tai a^{-n} $(n \in \boldsymbol{N})$ ir a^0 neturi prasmės!

1.4. Uždaviniai

37. Apskaičiuokite laipsnių su natūraliaisiais rodikliais reikšmes.

a) 5^2; $\left(\frac{1}{3}\right)^4$; $0{,}2^6$; $\left(1\frac{1}{2}\right)^2$; b) 5^3; $\left(\frac{1}{3}\right)^5$; $0{,}2^7$; $\left(1\frac{1}{2}\right)^3$;

c) $(-6)^2$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$; $(-0{,}1)^6$; $\left(-1\frac{2}{3}\right)^2$; d) $(-6)^3$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^5$; $(-0{,}1)^7$; $\left(-1\frac{2}{3}\right)^3$.

38. Pasakykite, kokie skaičiai turėtų būti parašyti vietoj x, kad lygybės būtų teisingos.

a) $x^3 = 0$; $x^3 = 1$; $x^3 = 8$; $x^3 = -8$; $x^3 = \frac{1}{8}$; $x^3 = -\frac{1}{27}$;

b) $x^2 = 0$; $x^2 = 4$; $x^2 = 9$; $x^2 = \frac{1}{4}$; $x^2 = 0{,}25$; $x^2 = -9$;

$x^3 = 64$,
$x = 4$, nes $4^3 = 64$.

c) $x^5 = 0$; $x^5 = 1$; $x^5 = -1$; $x^5 = 32$; $x^5 = \frac{1}{100\,000}$; $x^5 = -0{,}00032$;

d) $x^4 = 0$; $x^4 = 1$; $x^4 = 16$; $x^4 = \frac{1}{16}$; $x^4 = 0{,}0001$; $x^4 = -1$.

39. 1) Apskaičiuokite laipsnių su neigiamais sveikaisiais rodikliais reikšmes.

a) 2^{-2}; 4^{-3}; $(-2)^{-4}$; $(-3)^{-3}$; b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$; $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}$; $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$;

c) $0{,}2^{-2}$; $0{,}1^{-3}$; $(-1{,}2)^{-4}$; $(-2{,}5)^{-3}$; d) $\left(1\frac{1}{3}\right)^{-2}$; $\left(1\frac{1}{2}\right)^{-3}$; $\left(-1\frac{1}{2}\right)^{-4}$; $\left(-2\frac{1}{3}\right)^{-3}$.

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{-5} = \left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{243}{32}$; $(-0{,}3)^{-2} = \left(-\frac{3}{10}\right)^{-2} = \left(-\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{100}{9}$.

2) Įrodykite, kad teisinga lygybė $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.

40. Apskaičiuokite reiškinio su laipsniais reikšmę.

a) $2^5 - 3^2 \cdot 5^0$; b) $-2^3 - 4^{-2}$; c) $(-3)^3 + 2^4 : 5^{-2}$; d) $-4^0 - (-2)^2 \cdot 3^{-3}$.

41. Reiškinį užrašykite laipsniu, tada apskaičiuokite jo reikšmę.

a) $3^{-6} \cdot 3^9$; b) $(-2)^2 \cdot (-2)^{-3}$; c) $4^{-3} : 4^{-4}$; d) $(-5)^{-7} : (-5)^{-5}$;

e) $0{,}2^3 \cdot 10^3$; f) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} \cdot 5^{-2}$; g) $18^4 : 6^4$; h) $24^{-3} : 8^{-3}$;

i) $\left(2^{-4}\right)^{-1}$; j) $\left(3^2\right)^{-2}$; k) $\left(5^{-3}\right)^2 \cdot 5^8$; l) $\left(4^{-3}\right)^{-2} : 4^6$.

42. Kiekvieną skaičių parašykite laipsniu, kurio pagrindas lygus 10.

a) 100; 1000; 10 000; 1 000 000 000;

b) 0,1; 0,001; 0,0001; 0,00001; $\frac{1}{100\,000}$; $\frac{1}{10\,000\,000}$.

$100\,000 = 10^5$;
$0{,}01 = \frac{1}{100} = 10^{-2}$.

43. Skaičių užrašykite standartine išraiška.

a) 500 000; b) 17 000 000; c) 205 000; d) 10 000 000 000;

e) 0,00005; f) 0,00203; g) 0,000001; h) 0,00000000012.

Labai didelius teigiamuosius natūraliuosius skaičius ir labai mažas teigiamąsias dešimtaines trupmenas kartais patogu būna užrašyti vadinamąja ***standártine skaičiaus išraiška***:

$a \cdot 10^n$; čia $1 \leqslant a < 10$, $n \in \mathbf{Z}$.

Pavyzdžiui: $234\,000\,000 = 2{,}34 \cdot 10^8$; $0{,}000000234 = 2{,}34 \cdot 10^{-7}$.

44. Atlikite veiksmus su standartinės išraiškos skaičiais. Atsakymą parašykite standartinės išraiškos skaičiumi.

a) $\left(2 \cdot 10^5\right) + \left(3 \cdot 10^5\right)$; b) $\left(7{,}2 \cdot 10^{-7}\right) - \left(3{,}9 \cdot 10^{-7}\right)$; c) $\left(4 \cdot 10^6\right) - \left(5 \cdot 10^5\right)$;

d) $\left(2 \cdot 10^{15}\right) \cdot \left(3 \cdot 10^{-5}\right)$; e) $\left(8 \cdot 10^{-3}\right) : \left(1{,}6 \cdot 10^7\right)$; f) $\left(4 \cdot 10^{-5}\right) : \left(8 \cdot 10^{-7}\right)$.

$\left(5 \cdot 10^7\right) + \left(9 \cdot 10^7\right) = 10^7 \cdot (5 + 9) = 10^7 \cdot 14 = 10^7 \cdot 1{,}4 \cdot 10 = 1{,}4 \cdot 10^8$;
$\left(5 \cdot 10^7\right) \cdot \left(9 \cdot 10^{-3}\right) = 5 \cdot 9 \cdot 10^7 \cdot 10^{-3} = 45 \cdot 10^{7-3} = 45 \cdot 10^4 = 4{,}5 \cdot 10 \cdot 10^4 = 4{,}5 \cdot 10^5$.

1.5. Šaknys

Šiame atverstinyje prisiminsime antrojo ir trečiojo laipsnio šaknis, susipažinsime su aukštesniojo negu trečiojo laipsnio šaknimis ir sužinosime šaknų savybes.

$\sqrt[2n]{a}$ — $2n$-ojo (lyginio) laipsnio šaknis iš a; a — pošaknis, $2n$ — šaknies laipsnis ($n \in N$);

$\sqrt[2n+1]{a}$ — $(2n+1)$-ojo (nelyginio) laipsnio šaknis iš a; a — pošaknis, $2n+1$ — šaknies laipsnis ($n \in N$).



1 užduotis.

1) Raskite šaknų reikšmes. Atsakymus pagrįskite.

a) $\sqrt{4}$; $\sqrt{1}$; $\sqrt{0}$; $\sqrt{0{,}25}$; $\sqrt{\frac{9}{16}}$; b) $\sqrt[3]{8}$; $\sqrt[3]{1}$; $\sqrt[3]{0}$; $\sqrt[3]{-27}$; $\sqrt[3]{0{,}343}$; $\sqrt[3]{-\frac{27}{64}}$.

$\sqrt{a} = b$, kai $b^2 = a$ ($a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$);
$\sqrt{16} = 4$, nes $4^2 = 16$ ir $4 > 0$.

$\sqrt[3]{a} = b$, kai $b^3 = a$;
$\sqrt[3]{-8} = -2$, nes $(-2)^3 = -8$.

2) Užrašykite neneigiamąjį skaičių, kurį pakėlę kvadratu gautumėte:

a) 3; b) 8; c) 0,2; d) 1,5; e) $\frac{2}{3}$; f) $\frac{3}{5}$.

3) Užrašykite skaičių, kurį pakėlę kubu gautumėte:

a) 5; b) 0,3; c) $\frac{2}{5}$; d) -7; e) $-1{,}2$; f) $-\frac{3}{4}$.

$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$; $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$.

$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$; $\left(\sqrt[3]{7}\right)^3 = 7$.

2 užduotis.

1) Aukštesnio laipsnio šaknys apibrėžiamos panašiai kaip kvadratinės ir kubinės šaknys. Panagrinėkite lentoje pateiktus lyginio ir nelyginio laipsnių šaknų apibrėžimus.

$\sqrt[2n]{a} = b$, kai $b^{2n} = a$ ($a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $n \in N$);

$\sqrt[2n+1]{a} = b$, kai $b^{2n+1} = a$ ($n \in N$);

$\sqrt[4]{16} = 2$, nes $2^4 = 16$ ir $2 > 0$.

$\sqrt[5]{-32} = -2$, nes $(-2)^5 = -32$.

2) Raskite šaknų reikšmes. Atsakymus pagrįskite.

a) $\sqrt[4]{16}$; $\sqrt[4]{1}$; $\sqrt[4]{0}$; $\sqrt[4]{0{,}0625}$; $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$; b) $\sqrt[5]{32}$; $\sqrt[5]{1}$; $\sqrt[5]{0}$; $\sqrt[5]{-243}$; $\sqrt[5]{0{,}03125}$; $\sqrt[5]{-\frac{1}{1024}}$.

3) Užrašykite neneigiamąjį skaičių, kurį pakėlę ketvirtuoju laipsniu gautumėte:

a) 2; b) 13; c) 2,3; d) $\frac{3}{7}$.

4) Užrašykite skaičių, kurį pakėlę penktuoju laipsniu gautumėte:

a) 7; b) -12; c) 3,4; d) $-\frac{2}{5}$.

$\left(\sqrt[2n]{a}\right)^{2n} = a$ ($a \geqslant 0$, $n \in N$).

$\left(\sqrt[2n+1]{a}\right)^{2n+1} = a$ ($n \in N$).

3 užduotis.

Remdamiesi šaknų savybėmis (žr. apačioje), apskaičiuokite.

a) $\sqrt[4]{16 \cdot 81}$; b) $\sqrt[3]{64 : 8}$; c) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$; d) $\sqrt[3\cdot 2]{8}$; e) $\sqrt[4]{3^4 \cdot 2}$; f) $\sqrt[3]{2^6}$; g) $\left(\sqrt[4]{3}\right)^8$.

Šaknų savybės (apie jų įrodymą rašoma atverstinyje „Besidomintiems“, žr. p. 36–37):

$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$; $\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, kai $b \neq 0$; $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$;

$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n\cdot k]{a}$; $\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$; $\sqrt[n\cdot k]{a^k} = \sqrt[n]{a}$.

1.5. Uždaviniai

45. Skaičiuotuvu raskite apytiksles šaknų reikšmes. Atsakymus parašykite 0,01 tikslumu.
a) $\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt[4]{5}$; $\sqrt[5]{5}$; b) $\sqrt{10}$; $\sqrt[3]{10}$; $\sqrt[4]{10}$; $\sqrt[5]{10}$; c) $\sqrt{200}$; $\sqrt[3]{200}$; $\sqrt[4]{200}$; $\sqrt[5]{200}$.

Kai n-ojo laipsnio šaknies pošaknis nėra lygus jokio racionaliojo skaičiaus n-ajam laipsniui, tai n-ojo laipsnio šaknis yra iracionalusis skaičius. Jį rašydami dešimtaine trupmena, gauname begalinę dešimtainę neperiodinę trupmeną.
Pavyzdžiui: $\sqrt{2} = 1{,}4142... \approx 1{,}41$; $\sqrt[3]{2} = 1{,}2599... \approx 1{,}26$; $\sqrt[4]{2} = 1{,}1892... \approx 1{,}19$.

46. Apskaičiuokite lyginio laipsnio šaknų reikšmes.
a) $\sqrt{2^2}$; $\sqrt{(-2)^2}$; b) $\sqrt{3^2}$; $\sqrt{(-3)^2}$; c) $\sqrt{4^2}$; $\sqrt{(-4)^2}$;
d) $\sqrt[4]{2^4}$; $\sqrt[4]{(-2)^4}$; e) $\sqrt[4]{3^4}$; $\sqrt[4]{(-3)^4}$; f) $\sqrt[4]{4^4}$; $\sqrt[4]{(-4)^4}$.

$\sqrt{a^2} = |a|$; $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$.
$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$; $\sqrt[4]{(-5)^4} = |-5| = 5$.

47. Apskaičiuokite nelyginio laipsnio šaknų reikšmes.
a) $\sqrt[3]{2^3}$; $\sqrt[3]{(-2)^3}$; b) $\sqrt[3]{3^3}$; $\sqrt[3]{(-3)^3}$; c) $\sqrt[3]{4^3}$; $\sqrt[3]{(-4)^3}$;
d) $\sqrt[5]{2^5}$; $\sqrt[5]{(-2)^5}$; e) $\sqrt[5]{3^5}$; $\sqrt[5]{(-3)^5}$; f) $\sqrt[5]{4^5}$; $\sqrt[5]{(-4)^5}$.

$\sqrt[3]{a^3} = a$; $\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$.
$\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a$; $\sqrt[5]{(-5)^5} = -5$.

48. Koks skaičius turėtų būti parašytas vietoj x, kad būtų teisinga lygybė:
a) $\sqrt{x} = 2$? $\sqrt{x} = 3$? $\sqrt{x} = 4$? $\sqrt{x} = 1$? $\sqrt{x} = 0$? $\sqrt{x} = -4$?
b) $\sqrt[3]{x} = 2$? $\sqrt[3]{x} = 3$? $\sqrt[3]{x} = 4$? $\sqrt[3]{x} = 1$? $\sqrt[3]{x} = 0$? $\sqrt[3]{x} = -4$?
c) $\sqrt[4]{x} = 2$? $\sqrt[4]{x} = 3$? $\sqrt[4]{x} = 4$? $\sqrt[4]{x} = 1$? $\sqrt[4]{x} = 0$? $\sqrt[4]{x} = -4$?
d) $\sqrt[5]{x} = 2$? $\sqrt[5]{x} = 3$? $\sqrt[5]{x} = 4$? $\sqrt[5]{x} = 1$? $\sqrt[5]{x} = 0$? $\sqrt[5]{x} = -4$?

$\sqrt[3]{x} = -4$, $x = -64$, nes $\sqrt[3]{-64} = -4$.

49. Remdamiesi lygybėmis $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ ir $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$, apskaičiuokite:
a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$; b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$; c) $\sqrt{45} \cdot \sqrt{5}$; d) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9}$; e) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2}$;
f) $\sqrt{32} : \sqrt{2}$; g) $\sqrt{10} : \sqrt{2{,}5}$; h) $\sqrt{2} : \sqrt{8}$; i) $\sqrt[3]{54} : \sqrt[3]{2}$; j) $\sqrt[3]{0{,}1} : \sqrt[3]{100}$.

50. Apskaičiuokite:
a) stačiakampio, kurio kraštinių ilgiai yra $\sqrt{10}$ cm ir $\sqrt{3{,}6}$ cm, plotą;
b) kubo, kurio briaunos ilgis yra $\sqrt[3]{7}$ dm, tūrį;
c) stačiakampio gretasienio, kurio briaunų ilgiai yra $\sqrt[3]{2}$ cm, $\sqrt[3]{4}$ cm, $\sqrt[3]{8}$ cm, tūrį.

51. Remdamiesi lygybe $a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$, įkelkite dauginamąjį po šaknies ženklu.
a) $2\sqrt{3}$; b) $3\sqrt{2}$; c) $10\sqrt{2}$; d) $5\sqrt{5}$; e) $2\sqrt[3]{3}$; f) $3\sqrt[3]{2}$; g) $10\sqrt[3]{2}$; h) $5\sqrt[3]{5}$;
i) $2\sqrt[4]{3}$; j) $3\sqrt[4]{2}$; k) $10\sqrt[4]{2}$; l) $5\sqrt[4]{5}$; m) $2\sqrt[5]{3}$; n) $3\sqrt[5]{2}$; o) $10\sqrt[5]{2}$; p) $5\sqrt[5]{5}$.

52. Remdamiesi lygybėmis $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n \cdot k]{a}$ ir $\sqrt[n \cdot k]{a^k} = \sqrt[n]{a}$, apskaičiuokite:
a) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$; b) $\sqrt[3]{\sqrt{81}}$; c) $\sqrt[6]{100}$; d) $\sqrt[12]{81}$.

53. Su kuriomis x reikšmėmis šaknis turi prasmę?
a) $\sqrt{x+1}$; b) $\sqrt[3]{x+1}$; c) $\sqrt[4]{x-1}$; d) $\sqrt{2x-6}$; e) $\sqrt[5]{3x}$.

Reiškinys $\sqrt{x+2}$ turi prasmę, kai $x + 2 \geqslant 0$, $\Rightarrow$ $x \geqslant -2$.
Reiškinys $\sqrt[3]{5-x}$ turi prasmę su visomis x reikšmėmis, t. y. $x \in \boldsymbol{R}$.

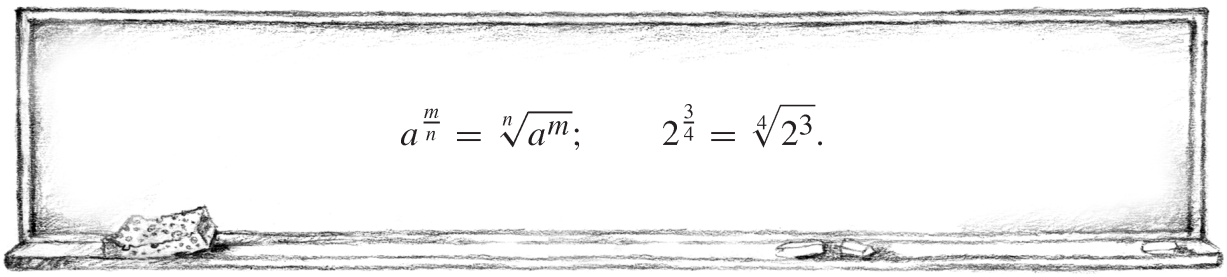
Lyginio laipsnio šaknys $\sqrt{a}$, $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[6]{a}$, ... yra neneigiami skaičiai.
Jos turi prasmę tik su *neneigiamomis* pošaknio a reikšmėmis, t. y. $\sqrt[2n]{a} \geqslant 0$ ir $a \geqslant 0$ ($n \in \boldsymbol{N}$).

1.6. Laipsniai su trupmeniniais racionaliaisiais rodikliais ir šaknys

Prasmę turi ne tik laipsniai, kurių rodikliai yra sveikieji skaičiai, bet ir laipsniai, kurių rodikliai yra trupmeniniai racionalieji skaičiai.
Šiame atverstinyje mokysimės laipsnius su trupmeniniais racionaliaisiais rodikliais.
$a^{\frac{m}{n}}$ — laipsnis; a — laipsnio pagrindas ($a > 0$), $\frac{m}{n}$ — laipsnio rodiklis ($m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$, $n > 1$).



1 užduotis.
1) Panagrinėkite lentoje užrašytą lygybę, kaip teigiamojo skaičiaus laipsnį su trupmeniniu racionaliuoju rodikliu galima pakeisti jam lygia šaknimi.



2) Panagrinėkite, kaip galima įsitikinti lygybės $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ teisingumu.
Lygybės $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ abiejų pusių reiškinius pakelkime n-uoju laipsniu:

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n}\cdot n} = a^m; \quad \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n = a^m.$$

Reiškinių $a^{\frac{m}{n}}$ ir $\sqrt[n]{a^m}$ n-ieji laipsniai yra lygūs ($a^m = a^m$), todėl lygūs ir patys reiškiniai:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

3) Įsitikinkite, kad $4^{\frac{3}{2}} = 8$.

2 užduotis. Naudodamiesi lygybe $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, užrašykite, kam lygus laipsnis, kurio rodiklis yra:
1) teigiamoji paprastoji trupmena:
a) $10^{\frac{2}{3}}$, $10^{\frac{3}{4}}$, $10^{\frac{4}{5}}$; b) $10^{\frac{3}{2}}$, $10^{\frac{4}{3}}$, $10^{\frac{5}{4}}$; c) $10^{\frac{1}{2}}$, $10^{\frac{1}{3}}$, $10^{\frac{1}{4}}$;

$5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$; $5^{\frac{3}{2}} = \sqrt{5^3} = \sqrt{125}$; $5^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{5^1} = \sqrt[4]{5}$.

2) teigiamoji dešimtainė baigtinė trupmena:
a) $2^{0,5}$; b) $3^{0,8}$; c) $3^{1,5}$; d) $2^{1,8}$; e) $4^{0,75}$; f) $8^{0,25}$;

$10^{0,6} = 10^{\frac{6}{10}} = 10^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{10^3} = \sqrt[5]{1000}$.

3) neigiamas trupmeninis racionalusis skaičius:
a) $10^{-\frac{2}{3}}$; b) $10^{-\frac{3}{2}}$; c) $10^{-\frac{1}{2}}$; d) $2^{-0,5}$; e) $3^{-1,5}$; f) $4^{-0,75}$.

$3^{-0,8} = 3^{-\frac{8}{10}} = 3^{-\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{3^{-4}} = \sqrt[5]{\frac{1}{3^4}} = \sqrt[5]{\frac{1}{81}}$;
$3^{-0,8} = \frac{1}{3^{0,8}} = \frac{1}{3^{\frac{8}{10}}} = \frac{1}{3^{\frac{4}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{3^4}} = \frac{1}{\sqrt[5]{81}}$.

1.6. Uždaviniai

54. Laipsnį su trupmeniniu rodikliu užrašykite šaknimi.

a) $5^{\frac{1}{2}}$; b) $3^{-\frac{3}{4}}$; c) $a^{\frac{1}{3}}$; d) $x^{-\frac{3}{4}}$; e) $2^{0,5}$; f) $6^{-0,8}$; g) $a^{0,75}$; h) $x^{-1,5}$; i) $10^{2\frac{1}{2}}$; j) $x^{-1\frac{1}{3}}$.

$x^{0,2} = x^{\frac{2}{10}} = x^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{x}$. $\Leftrightarrow$ $3^{-\frac{2}{3}} = 3^{\frac{-2}{3}} = \sqrt[3]{3^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$.

55. Šaknį užrašykite laipsniu su trupmeniniu rodikliu.

a) $\sqrt{3}$; b) $\sqrt{11}$; c) $\sqrt[3]{5}$; d) $\sqrt[3]{2^2}$; e) $\sqrt[4]{2^3}$;
f) $\sqrt[4]{4^{-1}}$; g) $\sqrt[3]{2^{-5}}$; h) $\sqrt[5]{3^{-2}}$; i) $\sqrt[4]{5^{-3}}$.

$\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{4^1} = 4^{\frac{1}{3}}$;
$\sqrt{2^{-3}} = 2^{-\frac{3}{2}}$.

56. Apskaičiuokite.

a) $36^{\frac{1}{2}}$; b) $81^{\frac{1}{4}}$; c) $0{,}25^{\frac{1}{2}}$; d) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$; e) $25^{-\frac{1}{2}}$; f) $27^{-\frac{1}{3}}$; g) $0{,}49^{-\frac{1}{2}}$; h) $\left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}$.

57. 1) Laipsnį užrašykite laipsniu, kurio pagrindas yra pirminis skaičius, tada apskaičiuokite jo reikšmę.

a) $4^{\frac{1}{2}}$; b) $64^{\frac{1}{2}}$; c) $27^{\frac{1}{3}}$; d) $8^{\frac{2}{3}}$;
e) $81^{-\frac{1}{2}}$; f) $25^{-\frac{1}{2}}$; g) $64^{-\frac{2}{3}}$;
h) $9^{1\frac{1}{2}}$; i) $49^{-2\frac{1}{2}}$; j) $16^{-1\frac{1}{4}}$.

Natūralieji skaičiai, kurie turi tik du daliklius — vienetą ir save patį, vadinami *pirmìniais*.

$9^{-\frac{1}{2}} = \left(3^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 3^{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = 3^{-1}$; $3^{-1} = \frac{1}{3}$.

2) Laipsnį, kuris duotas 1) punkte, užrašykite šaknimi, tada apskaičiuokite šaknies reikšmę.

$9^{-\frac{1}{2}} = 9^{\frac{-1}{2}} = \sqrt{9^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{9}}$; $\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$.

58. Šaknį iš laipsnio užrašykite laipsniu, kurio pagrindas lygus 2.

a) $\sqrt[3]{8^2}$; b) $\sqrt[4]{32^3}$; c) $\sqrt[5]{64^3}$; d) $\sqrt[3]{16^{-2}}$; e) $\sqrt[5]{128^{-4}}$; f) $\sqrt[6]{512^{-3}}$.

$\sqrt[10]{256^{-2}} = \sqrt[10]{\left(2^8\right)^{-2}} = \sqrt[10]{2^{-16}} = 2^{-\frac{16}{10}} = 2^{-\frac{8}{5}}$.

$\sqrt[10]{256^{-2}} = 256^{\frac{-2}{10}} = 256^{-\frac{1}{5}} = \left(2^8\right)^{-\frac{1}{5}} = 2^{-\frac{8}{5}}$.

59. Taikydami laipsnių savybes, apskaičiuokite skaitinio reiškinio su laipsniais reikšmę.

a) $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}$; b) $\left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^{6}$; c) $\left(4^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}}$; d) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{4}}$; e) $4^{3,75} \cdot 4^{-3,25}$; f) $5^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{0,75}$; g) $3^{\frac{5}{3}} : 3^{\frac{2}{3}}$;
h) $2^{\frac{3}{4}} : 2^{\frac{1}{2}}$; i) $9^{\frac{3}{4}} : 9^{0,25}$; j) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 32^{\frac{1}{2}}$; k) $3^{\frac{2}{3}} \cdot 9^{\frac{2}{3}}$; l) $32^{\frac{1}{2}} : 2^{\frac{1}{2}}$; m) $56^{\frac{2}{3}} : 7^{\frac{2}{3}}$; n) $3^0 : (-5)^0$.

Laipsniai su trupmeniniais rodikliais turi tas pačias savybes kaip ir laipsniai su sveikaisiais rodikliais.

$3^{\frac{1}{2}} : 3^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}} = 3^{\frac{3-1}{6}} = 3^{\frac{2}{6}} = 3^{\frac{1}{3}}$.

60. Naudodamiesi laipsnių savybėmis, suprastinkite reiškinį.

a) $\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{1\frac{1}{2}}$; b) $\left(a^{-2,5}\right)^{-0,4}$; c) $b^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{1}{4}}$; d) $\frac{2}{3}a^{-\frac{3}{4}} \cdot 3a$; e) $a^{-\frac{3}{5}} : a^{-\frac{4}{5}}$; f) $\left(4y^{-\frac{7}{8}}\right) : \left(2y^{\frac{1}{8}}\right)$.

$\frac{2}{5}x^{-\frac{3}{4}} \cdot 5x = \left(\frac{2}{5} \cdot 5\right) \cdot \left(x^{-\frac{3}{4}} \cdot x\right) = 2 \cdot x^{-\frac{3}{4}+1} = 2x^{\frac{1}{4}}$. $\Leftrightarrow$ $x = x^1$.

61. Koks skaičius turėtų būti parašytas vietoj x, kad būtų teisinga lygybė:

a) $x^{\frac{2}{3}} = 1$? b) $x^{\frac{1}{2}} = 4$? c) $x^{\frac{1}{3}} = 3$? d) $x^{0,5} = 2$?

1.7. Logaritmai

Šiame atverstinyje susipažinsime su skaičiais, kurie rašomi vartojant santrumpą „log“ (*skaitoma*: logaritmas).

$\log_a b$ — skaičiaus b logaritmas pagrindu a; $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.



1 užduotis.

1) Iš lygybės $2^3 = 8$ išreikškite laipsnio pagrindą 2.

Iš lygybės $a^n = b$ ($a > 0$, $n \in N$, $n > 1$) išreikšdami laipsnio pagrindą a, vartojame šaknį (žymima „$\sqrt[n]{\ }$“).

Pavyzdžiui, $5^3 = 125$, $\Rightarrow$ $5 = \sqrt[3]{125}$.

2) Iš lygybės $2^3 = 8$ išreikškite laipsnio rodiklį 3.

Iš lygybės $a^c = b$ ($a > 0$) išreikšdami laipsnio rodiklį c, vartojame *logaritmą* (žymima „$\log_a$“).

Pavyzdžiui, $5^3 = 125$, $\Rightarrow$ $3 = \log_5 125$.

3) Naudodamiesi logaritmo ženklu, iš lygybės išreikškite laipsnio rodiklį.

a) $3^2 = 9$; b) $5^2 = 25$; c) $3^3 = 27$; d) $4^3 = 64$; e) $10^2 = 100$; f) $10^4 = 10\,000$.

$\log_a b = c$, kai $a^c = b$; $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$;

$\log_2 8 = 3$, nes $2^3 = 8$.

$\log_a b$ turi prasmę, kai skaičius b yra teigiamas, o pagrindas a — teigiamas ir nelygus 1.

2 užduotis. Perskaitykite logaritmą. Kam lygi jo reikšmė? Atsakymą pagrįskite.

a) $\log_3 9$; b) $\log_5 25$; c) $\log_3 27$; d) $\log_4 64$; e) $\log_{10} 100$; f) $\log_{10} 10\,000$.

Skaičiaus a logaritmas pagrindu 10 dažnai žymimas $\lg a$ (*suprantama*: $\lg a = \log_{10} a$). Pavyzdžiui, $\lg 100 = 2$, nes $10^2 = 100$. Logaritmas, kurio pagrindas lygus 10, vadinamas ***dešimtainiu logaritmu***.

3 užduotis. Raskite skaičių x, su kuriuo teisinga lygybė:

a) $2^x = 8$; b) $5^x = 25$; c) $3^x = 27$; d) $10^x = 100$;

e) $2^x = 7$; f) $5^x = 20$; g) $3^x = 15$; h) $10^x = 9$.

$10^x = 5$,

$x = \lg 5$.

Jei $a^x = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$), tai $x = \log_a b$.

$\log_a b$ yra skaičius, kuriuo pakėlę a gauname b, t. y.

$$a^{\log_a b} = b \quad (b > 0, a > 0, a \neq 1).$$

Lygybė $a^{\log_a b} = b$ dažnai vadinama ***pagrindine logaritmine tapatybe.***

62. Apskaičiuokite logaritmo reikšmę.

a) $\log_4 64$; b) $\log_6 \frac{1}{36}$; c) $\log_7 7$; d) $\log_4 1$;

e) $\log_{\frac{1}{4}} 4$; f) $\log_{\frac{1}{6}} 36$; g) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{2}{3}$; h) $\log_{0,2} 1$;

i) $\log_{\frac{3}{4}} \frac{4}{3}$; j) $\log_{\frac{2}{5}} \frac{4}{25}$; k) $\log_{0,5} \frac{1}{16}$; l) $\log_5 \sqrt[3]{25}$.

$\log_{0,1} 10 = -1$, nes $0{,}1^{-1} = \left(\frac{1}{10}\right)^{-1} = \left(\frac{10}{1}\right)^{1} = 10$;

$\log_4 \sqrt[3]{16} = \frac{2}{3}$, nes $4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16}$.

$\log_a a = 1$,

$\log_a 1 = 0$; $a > 0$, $a \neq 1$.

63. Raskite dešimtainio logaritmo reikšmę.

a) $\lg 1000$; b) $\lg 1$; c) $\lg 10$; d) $\lg \frac{1}{10}$; e) $\lg \frac{1}{100}$; f) $\lg 0{,}001$; g) $\lg 0{,}0001$.

64. Naudodamiesi logaritmo ženklu, užrašykite skaičių, kuriuo pakėlę 5 gauname:

a) 25; b) 125; c) $\frac{1}{5}$; d) 0,125; e) $\sqrt{5}$; f) $\sqrt[3]{5}$; g) 6; h) 50; i) 11; j) 0,5; k) $\frac{2}{3}$.

Skaičius, kuriuo pakėlę 3 gauname 5, yra lygus $\log_3 5$.
Iš tikrųjų, $3^{\log_3 5} = 5$.

Skaičius, kuriuo pakėlę a gauname b, yra lygus $\log_a b$, t. y.
$a^{\log_a b} = b$.

65. Raskite x reikšmę, su kuria lygybė yra teisinga.

a) $2^x = 16$; b) $2^x = 128$; c) $2^x = 1$; d) $2^x = 2$; e) $2^x = \frac{1}{8}$; f) $2^x = \frac{1}{32}$;

g) $2^x = 10$; h) $2^x = 100$; i) $2^x = 9$; j) $2^x = \frac{1}{3}$; k) $2^x = \sqrt{2}$; l) $2^x = \sqrt[3]{2}$.

$3^x = 81$, $\Rightarrow$ $x = \log_3 81 = 4$.

$2^x = 7$, $\Rightarrow$ $x = \log_2 7$.

66. Raskite x reikšmę, su kuria lygybė yra teisinga.

a) $\log_2 x = 3$; b) $\log_5 x = 2$; c) $\log_7 x = -1$;

d) $\log_{11} x = -2$; e) $\log_{16} x = \frac{1}{2}$; f) $\log_8 x = -\frac{1}{2}$;

g) $\lg x = \frac{1}{10}$; h) $\lg x = -\frac{2}{3}$; i) $\lg x = 0$.

$\log_3 x = 4$, $\Rightarrow$ $x = 3^4 = 81$.

$\log_8 x = -\frac{2}{3}$, $\Rightarrow$ $x = 8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{4}$.

67. Raskite x reikšmę, su kuria lygybė yra teisinga.

a) $\log_x 25 = 2$; b) $\log_x 1000 = 3$; c) $\log_x 100 = 2$;

d) $\log_x 10 = \frac{1}{2}$; e) $\log_x 125 = -3$; f) $\log_x 5 = 1$.

Raskime x reikšmę, su kuria lygybė $\log_x 9 = 2$ yra teisinga.
Pagal logaritmo apibrėžimą $\log_x 9 = 2$, kai $x^2 = 9$.
Lygtis $x^2 = 9$ turi du sprendinius: $x_1 = 3$, $x_2 = -3$.
Kadangi $\log_x 9$ turi prasmę, kai $x > 0$ ir $x \neq 1$, tai reikšmė $x = -3$ netinka, nes $-3 < 0$.
Vadinasi, $x = 3$.

68. Raskite x reikšmes, su kuriomis logaritmas turi prasmę.

a) $\log_5(x+1)$; b) $\log_3(2x)$; c) $\log_2(-5x+10)$; d) $\lg x^2$; e) $\log_{x+1} 5$; f) $\log_{2x} 10$.

$\log_4(2x-4)$ turi prasmę, kai $2x - 4 > 0$. Išsprendžiame šią nelygybę: $2x > 4$, $x > 2$.
Atsakymas. $\log_4(2x-4)$ turi prasmę, kai $x > 2$.

1.8. Logaritmų savybės

Praeituose atverstiniuose nagrinėjome šaknų ir laipsnių savybes. Šiame atverstinyje susipažinsime su kai kuriomis logaritmų savybėmis. Jos surašytos lentoje.

1 užduotis. Panagrinėkite lentoje užrašytas logaritmų savybes. Šių savybių teisingumu įsitikinkite pavyzdžiais, atlikdami 2–4 užduotis.

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y,$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y,$$

$$\log_a\left(x^n\right) = n \cdot \log_a x; \quad x > 0, y > 0, a > 0, a \neq 1, n \in \boldsymbol{R}.$$

Šių savybių įrodymai yra atverstinyje „Besidomintiems“ (žr. p. 37).

2 užduotis. Įsitikinkite, kad sandaugos logaritmas yra lygus dauginamųjų logaritmų sumai.

a) $\log_2(16 \cdot 8) = \log_2 16 + \log_2 8$; b) $\log_3(27 \cdot 3) = \log_3 27 + \log_3 3$.

Įsitikinkime, kad

$$\log_2(8 \cdot 4) = \log_2 8 + \log_2 4.$$

Iš tikrųjų, ši lygybė yra teisinga, nes:

$$\log_2(8 \cdot 4) = \log_2 32 = 5; \quad \log_2 8 + \log_2 4 = 3 + 2 = 5.$$

3 užduotis. Įsitikinkite, kad dalmens logaritmas yra lygus dalinio ir daliklio logaritmų skirtumui.

a) $\log_2(16 : 8) = \log_2 16 - \log_2 8$; b) $\log_3(27 : 3) = \log_3 27 - \log_3 3$.

Įsitikinkime, kad

$$\log_2(8 : 4) = \log_2 8 - \log_2 4.$$

Iš tikrųjų, ši lygybė yra teisinga, nes:

$$\log_2(8 : 4) = \log_2 2 = 1; \quad \log_2 8 - \log_2 4 = 3 - 2 = 1.$$

4 užduotis. Įsitikinkite, kad laipsnio logaritmas yra lygus laipsnio rodiklio ir laipsnio pagrindo logaritmo sandaugai.

a) $\log_2\left(2^3\right) = 3 \cdot \log_2 2$; b) $\log_3\left(9^2\right) = 2 \cdot \log_3 9$.

Įsitikinkime, kad

$$\log_2\left(4^3\right) = 3 \cdot \log_2 4.$$

Iš tikrųjų, ši lygybė yra teisinga, nes:

$$\log_2\left(4^3\right) = \log_2 64 = 6; \quad 3 \cdot \log_2 4 = 3 \cdot 2 = 6.$$

1.8. Uždaviniai

69. Apskaičiuokite taikydami logaritmų savybes:
$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$, $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$, $\log_a\left(x^n\right) = n \cdot \log_a x$.

a) $\log_3(27 \cdot 81)$; b) $\log_5(25 \cdot 125)$; c) $\lg(100 \cdot 1000)$; d) $\log_{\frac{1}{2}}(16 \cdot 32)$;

e) $\log_3 \frac{81}{9}$; f) $\log_4 \frac{64}{16}$; g) $\lg \frac{1000}{10}$; h) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{64}{2}$;

i) $\log_3\left(27^2\right)$; j) $\log_6\left(36^3\right)$; k) $\lg\left(100^2\right)$; l) $\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^6$.

70. Naudodamiesi logaritmų savybe $\log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y)$, apskaičiuokite logaritmų sumą.

a) $\log_4 2 + \log_4 8$; b) $\log_3 2 + \log_3 4{,}5$; c) $\log_{12} 4 + \log_{12} 3$;

d) $\lg 20 + \lg 50$; e) $\lg 4 + \lg 25$; f) $\lg 0{,}8 + \lg 1{,}25$;

g) $\log_{\frac{1}{2}} 3{,}2 + \log_{\frac{1}{2}} 10$; h) $\log_{\frac{1}{3}} 2 + \log_{\frac{1}{3}} 13{,}5$; i) $\log_{\sqrt{3}} \frac{3}{4} + \log_{\sqrt{3}} 1\frac{1}{3}$.

71. Naudodamiesi logaritmų savybe $\log_a x - \log_a y = \log_a\left(\frac{x}{y}\right)$, apskaičiuokite logaritmų skirtumą.

a) $\log_3 18 - \log_3 6$; b) $\log_4 2 - \log_4 8$; c) $\log_7 0{,}25 - \log_7 \frac{1}{4}$;

d) $\lg 20 - \lg 2$; e) $\lg 3{,}2 - \lg 0{,}32$; f) $\lg 50 - \lg 500$;

g) $\log_{0,5} 2{,}8 - \log_{0,5} 0{,}7$; h) $\log_{\frac{1}{3}} 8 - \log_{\frac{1}{3}} 24$; i) $\log_{\sqrt{2}} \frac{3}{4} - \log_{\sqrt{2}} 0{,}75$.

72. Apskaičiuokite naudodamiesi logaritmų savybe $n \cdot \log_a x = \log_a\left(x^n\right)$.

a) $2\log_{25} 5$; b) $4\log_9 3$; c) $6\log_8 2$; d) $3\log_{64} \frac{1}{4}$; e) $-\log_3 \frac{1}{9}$; f) $-2\log_9 3$.

73. Apskaičiuokite reiškinio su logaritmais reikšmę.

a) $\log_3 9 + 2\log_3 \frac{1}{3}$; b) $3\log_2 4 + 2\log_2 2$; c) $\log_{\frac{1}{2}} 4 + 3\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$;

d) $\log_4 256 - 3\log_4 16$; e) $4\log_2 4 - 3\log_2 16$; f) $\log_{\frac{1}{3}} 81 - 2\log_{\frac{1}{3}} 9$;

g) $2\log_3 2 + \log_3 5 - \log_3 60$; h) $\lg 2 - 3\lg \sqrt[3]{3} + \lg 150$; i) $-2\log_{\frac{2}{3}} 3 - 3\log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{3} - \log_{\frac{2}{3}} 2$.

74. Nustatykite, ar lygybė yra teisinga.

a) $\log_3 \frac{2}{3} + \log_3 9 = \log_3 36 - \log_3 6$; b) $\log_{\frac{1}{2}} 5 + \log_{\frac{1}{2}} \frac{3}{10} = \log_{\frac{1}{2}} 6 - \log_{\frac{1}{2}} 8$;

c) $\lg 40 - \lg 0{,}5 = \lg 16 + \lg 5$; d) $\lg 20 - \lg 8 = \lg 5 + \lg 0{,}5$;

e) $\log_{\frac{1}{2}} 5 + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{10} = \log_{\frac{1}{3}} 2 - \log_{\frac{1}{3}} 6$; f) $\log_{\frac{2}{3}} 0{,}5 + \log_{\frac{2}{3}} 2 = \log_{0,7} 0{,}75 - \log_{0,7} \frac{3}{4}$.

Nustatykime, ar lygybė $\log_3 2 + \log_3 0{,}5 = \log_7 \frac{1}{2} - \log_7 0{,}5$ yra teisinga.
$\log_3 2 + \log_3 0{,}5 = \log_3(2 \cdot 0{,}5) = \log_3 1 = 0$;
$\log_7 \frac{1}{2} - \log_7 0{,}5 = \log_7\left(\frac{1}{2} : 0{,}5\right) = \log_7 1 = 0$.
Kadangi $0 = 0$, tai duotoji lygybė yra teisinga.

75. Nustatykite, koks skaičius turėtų būti parašytas vietoj kvadratėlio.

a) $\log_7 4 + \log_7 \square = \log_7 36$; b) $\log_{\frac{1}{3}} \square + \log_{\frac{1}{3}} 5 = \log_{\frac{1}{3}} 1$; c) $\lg \frac{2}{3} + \lg \square = \lg 4$;

d) $\log_5 16 - \log_5 \square = \log_5 2$; e) $\log_{\frac{3}{5}} \square - \log_{\frac{3}{5}} \frac{2}{3} = \log_{\frac{3}{5}} 9$; f) $\lg 5 - \lg \square = \lg \frac{1}{2}$.

$\log_6 5 - \log_6 \square = \log_6 25$.
Kadangi $\log_6 5 - \log_6 \square = \log_6\left(\frac{5}{\square}\right)$, tai: $\log_6\left(\frac{5}{\square}\right) = \log_6 25$.
Ši lygybė yra teisinga, kai: $\frac{5}{\square} = 25$, $\square = \frac{5}{25}$, $\square = \frac{1}{5}$.
Iš tikrųjų, $\log_6 5 - \log_6 \frac{1}{5} = \log_6\left(5 : \frac{1}{5}\right) = \log_6(5 \cdot 5) = \log_6 25$.

1.9. Skaitiniai reiškiniai

Šiame atverstinyje skaičiuosime reikšmes reiškinių, kuriuose yra ne tik sudėties, atimties, daugybos bei dalybos veiksmai, bet yra ir laipsnių, ir šaknų, ir logaritmų.



1 užduotis. Duotas skaitinis reiškinys, kuriame *nėra* apskliaustų veiksmų:

$$5 - 6 : \sqrt[3]{8} + 2^3 \cdot \log_2 8.$$

1) Kokius veiksmus reikės atlikti, skaičiuojant reiškinio reikšmę?
2) Apskaičiuokite reiškinio reikšmę.

Skaičius, kurį gauname atlikę skaitinio reiškinio veiksmus, vadinamas jo *reikšme*.

Skaičiuojant reiškinio $4 - 8 \cdot \sqrt{9} + 3^2 : \log_2 \frac{1}{8}$ reikšmę, reikės atlikti tokius veiksmus:
1) ištrauktį šaknį, pakelti laipsniu ir logaritmuoti;
2) padauginti ir padalyti;
3) atimti ir sudėti.

$$\begin{aligned} &4 - 8 \cdot \sqrt{9} + 3^2 : \log_2 \tfrac{1}{8} = \\ &= 4 - 8 \cdot 3 + 9 : (-3) = \\ &= 4 - 24 + (-3) = \\ &= -20 + (-3) = \\ &= -23. \end{aligned}$$

Ieškant skaitinio reiškinio reikšmės, būtina laikytis veiksmų tvarkos!

Veiksmų tvarka

1	Kėlimas laipsniu a^b	Šaknies traukimas $\sqrt[b]{c}$	Logaritmavimas $\log_a c$
2	Daugyba $a \cdot b$	Dalyba $c : b$	
3	Sudėtis $a + b$	Atimtis $c - b$	

2 užduotis. Apskaičiuokite skaitinio reiškinio, kuriame *yra* apskliaustų veiksmų, reikšmę:

$$(5 - 6) : \left(\sqrt[3]{8} + 2\right)^3 \cdot \log_2 16.$$

Kai reiškinyje yra apskliaustų veiksmų, tai pirmiausia atliekami skliaustuose esantys veiksmai.

$$\begin{aligned} &4 - 8 \cdot \left(\sqrt{9} + 3\right)^2 : \log_2 8 = \\ &= 4 - 8 \cdot (3 + 3)^2 : 3 = \\ &= 4 - 8 \cdot 6^2 : 3 = \\ &= 4 - 8 \cdot 36 : 3 = \\ &= 4 - 288 : 3 = \\ &= 4 - 96 = \\ &= -92. \end{aligned}$$

3 užduotis. Rasa pasirinko skaičių. Tada iš jo ištraukė kubinę šaknį. Prie gautojo rezultato ji pridėjo skaičiaus, kuris yra trimis vienetais mažesnis už pasirinktąjį skaičių, kvadratą. Galiausiai gautąjį rezultatą ji padalijo iš 9. Kokį skaičių gavo Rasa, jei jos pasirinktas skaičius buvo lygus:
a) 8? b) −8? c) 0?
Spręsdami šį uždavinį, pirmiausia sudarykite sąlygą atitinkantį skaitinį reiškinį, o tada apskaičiuokite jo reikšmę.

1.9. Uždaviniai

76. Apskaičiuokite skaitinio reiškinio reikšmę.

a) $3-7+4-5$; b) $-2-3+13-(-2)$; c) $-2+(-3)-4-(-15)$;

d) $5\cdot 6:2:3$; e) $-10\cdot(-1):(-2)\cdot 4$; f) $25:(-5)\cdot 10:(-2)$;

g) $\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}$; h) $-\sqrt{3}-\sqrt{3}-\sqrt{3}-\sqrt{3}$; i) $\sqrt{5}+\sqrt{5}-\sqrt{5}+2\sqrt{5}-7\sqrt{5}$;

j) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$; k) $\sqrt{3}:\sqrt{3}:\sqrt{3}:\sqrt{3}$; l) $3\cdot\sqrt[3]{3}:3\cdot\sqrt[3]{3}:3\cdot\sqrt[3]{3}$.

Kai skaitiniame reiškinyje yra tik to paties eiliškumo aritmetiniai veiksmai, t. y.
- arba tik sudėtis ir atimtis,
- arba tik dalyba ir daugyba,

tai juos būtina atlikti iš kairės į dešinę.

$\underline{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}}-3\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{2}=\underline{2\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{2}}+5\sqrt[3]{2}=-\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{2}=4\sqrt[3]{2}$;

$\underline{2\cdot\sqrt{2}}:2\cdot\sqrt{2}=\underline{2\sqrt{2}:2}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$.

77. Apskaičiuokite reiškinio reikšmę.

a) $86:17{,}2\cdot\frac{25}{72}$; b) $117{,}45:13{,}5-3{,}5\cdot 2{,}2$; c) $81:7{,}5-3{,}8:\frac{19}{75}$;

d) $\lg\sqrt{10}\cdot 6^1+0{,}25^{-\frac{1}{2}}:\sqrt[3]{0{,}001}-\sqrt{49}$; e) $5+5\cdot\sqrt{25}-5^2:\log_5 5-\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$;

f) $5+4\cdot\log_5 25-10:\sqrt{100}+5^0$; g) $0{,}1\cdot\log_5 5+\sqrt[3]{-1}\cdot 0{,}1^{-1}-(-2)^3$;

h) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot 2\frac{1}{4}:\left(-\frac{3}{4}\right)^{-1}-\lg\frac{1}{10}\cdot\sqrt[4]{0}$; i) $2:\frac{3}{5}+1{,}8\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)-\sqrt{\frac{4}{25}}\cdot\log_5 1$;

j) $-2\cdot 5^3:\lg 10-5^0$; k) $\log_2\sqrt{2}\cdot(-2)^2+0{,}25^{-\frac{1}{2}}:\sqrt[3]{0{,}001}$.

78. Apskaičiuokite reiškinio su apskliaustais veiksmais reikšmę.

a) $\left(10\frac{3}{10}-8\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{5}{9}$; b) $\frac{1}{36}:\left(\frac{11}{12}-\frac{5}{9}\right)+\frac{12}{13}$; c) $\left(\frac{7}{18}\cdot 1\frac{1}{7}+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{5}$;

d) $\left(0{,}26-\frac{1}{20}\right)\cdot 3\frac{4}{7}$; e) $\left(1\frac{2}{7}+1\frac{1}{21}\right)\cdot\left(-\frac{6}{7}\right)$; f) $-86:17{,}2\cdot\left(\frac{25}{72}-\frac{1}{2}\right)$;

g) $(2-3):\sqrt[3]{8}+5^2\cdot\log_2 16$; h) $2-3:\left(\sqrt[3]{8}+5^2\right)\cdot\log_2 16$; i) $2-\left(3:\sqrt[3]{8}+5^2\right)\cdot\log_2 16$;

j) $5+4\cdot\left(\log_4 16-10\right):\left(\sqrt{100}-3^0\right)$; k) $\left(\log_3\frac{1}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)\cdot\sqrt[3]{1}-\frac{1^2}{2}:2{,}5$;

l) $2\sqrt{5-\lg 10}+\left(\frac{1}{2}-1\right)^3\cdot\left(\sqrt[3]{64}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right)$; m) $\log_2\left(4+\sqrt{16}\right)-2\cdot\left(2+\sqrt{9}\right)^2$.

79. Sudarykite kokį nors skaitinį reiškinį su laipsniais, šaknimis ir logaritmais, kurio reikšmė būtų lygi:
a) 10; b) -5; c) 1; d) -1; e) 0.

80. Pirmą dieną turistai nukeliavo 120 km, antrąją — 34 km mažiau negu pirmąją, o trečiąją — dvigubai mažiau negu nukeliavo per pirmąsias dvi dienas kartu. Kiek kilometrų iš viso nukeliavo turistai per tris dienas? Sudarykite skaitinį reiškinį ir apskaičiuokite jo reikšmę.

81. Vaza yra stačiakampio gretasienio formos. Vazos aukštis lygus 10 cm, ilgis sudaro 75 % aukščio, o plotis yra 4 cm trumpesnis už ilgį.

1) Apskaičiuokite vazos viso išorinio paviršiaus plotą. Atsakymą parašykite kvadratiniais centimetrais.

Stačiakampio gretasienio viso paviršiaus plotas lygus jo visų sienų plotų sumai.

2) Kiek mililitrų vandens telpa į šią vazą (į vazos sienelių storį nekreipkite dėmesio)?

$1000\,\text{cm}^3=1\,\text{dm}^3,\quad 1\,\text{dm}^3=1\,\ell,\quad 1\,\ell=1000\,\text{m}\ell,\quad 1\,\text{cm}^3=1\,\text{m}\ell.$

3) Ar į šią vazą telpa ketvirtis litro vandens?

1.10. Raidiniai reiškiniai

Šiame atverstinyje skaičiuosime reiškinių su raidėmis (kintamaisiais) reikšmes. Taip pat prisiminsime, kaip raidiniai reiškiniai yra pertvarkomi ir prastinami.



1 užduotis. Duoti du reiškiniai su vienu kintamuoju a:

$$(2a+1)^2 \quad \text{ir} \quad 4a^2+4a+1.$$

1) Įsitikinkite, kad abiejų reiškinių reikšmės yra lygios, kai: a) $a=3$; b) $a=-3$; c) $a=0$.

Kai $a=5$, tai:
$(2a+1)^2=(2\cdot 5+1)^2=(10+1)^2=11^2=121$;
$4a^2+4a+1=4\cdot 5^2+4\cdot 5+1=4\cdot 25+20+1=100+20+1=121$.

2) Įrodykite, kad abiejų reiškinių reikšmės yra lygios esant visoms a reikšmėms.

Įrodykime, kad $(2a-1)^2=4a^2-4a+1$.
Iš tikrųjų, $(2a-1)^2=(2a-1)\cdot(2a-1)=4a^2-2a-2a+1=4a^2-4a+1$.
Be abejo, galima remtis ir skirtumo kvadrato formule:
$(2a-1)^2=(2a)^2-2\cdot 2a\cdot 1+1^2=4a^2-4a+1$.

3) Ar reiškiniai yra tapačiai lygūs?

Reiškiniai, turintys tuos pačius kintamuosius ir su visomis leistinomis kintamųjų reikšmėmis įgyjantys vienodas reikšmes, vadinami ***tapačiaĩ lygiaĩs reiškiniaĩs***. Tapačiai lygių reiškinių lygybė vadinama ***tapatýbe***.
Pavyzdžiui, reiškiniai $(a+b)^2$ ir $a^2+2ab+b^2$ yra tapačiai lygūs.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2,$$
$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2.$$

Šios tapatybės vadinamos *greitõsios daugýbos fòrmulėmis*.

2 užduotis. Suprastinę reiškinį

$$2a(1+a)^2-(2a-3)^2-2a^3,$$

įsitikinkite, kad jis tapačiai lygus reiškiniui

$$14a-9.$$

Suprastinkime reiškinį:
$$\begin{aligned}-2a(a-1)^2-(1-2a)^2+2a^3 &= -2a\left(a^2-2a+1\right)-\left(1-4a+4a^2\right)+2a^3=\\ &= -2a^3+4a^2-2a-1+4a-4a^2+2a^3=\\ &= 2a-1.\end{aligned}$$
Vadinasi,
$-2a(a-1)^2-(1-2a)^2+2a^3=2a-1$.

82. Apskaičiuokite reiškinio reikšmę.

a) $x^2 - 1$, kai $x = 0$; $x = -1$; $x = 1$; $x = \sqrt{3}$; $x = 0{,}5$; $x = -\frac{2}{3}$;

b) $2a^3 - a^2 + 5a - 1$, kai $a = 0$; $a = -1$; $a = 1$;

c) $\sqrt{m} - 2m$, kai $m = 0$; $m = 4$; $m = \frac{1}{25}$; $m = 5$;

d) $y^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{1}{2}}$, kai $y = 1$; $y = 4$; $y = 8$;

e) $\log_3 a - 2a^3$, kai $a = 1$; $a = 3$; $a = \frac{1}{3}$; $a = \sqrt[3]{3}$.

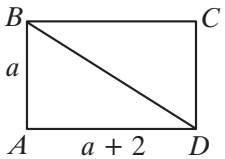
83. Sutraukite panašiuosius narius.

a) $3x - 5x - 4y + 5y$; b) $-2x^2 + 3x^2 + 3y^3 - 8y^3$; c) $10 - a + 2ab + b - ab + 10 - b$;
d) $a^2 - 2ab + b^2 - 2b^2 - ab$; e) $2a - 5 + 3a^2 - a + b - 3b^2 - 7 + 5a^2 - 12b + b^2 - a + 4$.

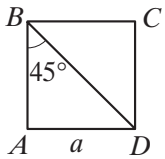
$10 - 5a + b + 3a - 2b + 9 + a^2 = 19 - 2a - b + a^2$.

84. Pavaizduotas stačiakampis $ABCD$.

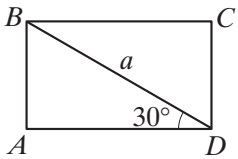
a)



b)



c)



1) Naudodamiesi brėžinio duomenimis, užrašykite:
kam lygus stačiakampio perimetras P_{ABCD} ir plotas S_{ABCD};
kam lygus trikampio ABD perimetras P_{ABD} ir plotas S_{ABD}.

2) Apskaičiuokite P_{ABCD}, S_{ABCD}, P_{ABD} ir S_{ABD} reikšmes, kai:
$a = 1$ cm; $a = 0{,}5$ cm; $a = \frac{2}{3}$ dm; $a = \sqrt{2}$ m.

85. Atskliauskite.

a) $a(a + 3)$; b) $2x(3x - x^2)$; c) $-a(2a + b)$; d) $-2y(2 - 3y^2)$; e) $-4t(-2t^2 - t)$;
f) $(a - 1)(a + 2)$; g) $(a + b)(b - 3)$; h) $(x - y)(5 - y)$; i) $(-a - b)(-5 - a)$.

$a \cdot (b + c) = ab + ac$; $(a + b)(c - d) = ac - ad + bc - bd$.

86. Įrodykite greitosios daugybos formules.

a) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; b) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; c) $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$;
d) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; e) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

87. Suprastinkite reiškinį.

a) $(a + b)^2 - (a - b)^2$; b) $3a(a - 2) - 4(a^2 - 1{,}5a)$; c) $4x(x - y) + (x + 2y)^2 - 6x^2$.

88. Išskaidykite dauginamaisiais, pritaikę greitosios daugybos formules.

a) $x^2 - y^2$; b) $4a^2 - 25$; c) $-9x^2 + 16y^2$; d) $\frac{4}{9}a^2 - \frac{16}{25}b^2$;
e) $a^2 + 4ab + 4b^2$; f) $4x^2 - 28x + 49$; g) $9a^2 + 24ab + 16b^2$; h) $-25 - 20a - 4a^2$.

$49a^2 - 25b^2 = (7a)^2 - (5b)^2 = (7a - 5b)(7a + 5b)$;
$9a^2 + 6ab + b^2 = (3a)^2 + 2 \cdot 3a \cdot b + b^2 = (3a + b)^2$. $(3a + b)^2 = (3a + b) \cdot (3a + b)$.

89. Nustatykite, ar reiškiniai yra tapačiai lygūs.

a) $(a - b)^2$ ir $(b - a)^2$; b) $(a - b)^2$ ir $-(a + b)^2$; c) $(-a - b)^2$ ir $(a + b)^2$;
d) $(a + b)^2 - (a - b)^2$ ir $4ab$; e) $(a + b)^2 + (a - b)^2$ ir $2(a^2 + b^2)$.

Apibendriname

Aibės

Aibė — tam tikrą savybę tenkinančių objektų rinkinys.
Aibės elementai — aibę sudarantys objektai.
Aibės žymimos didžiosiomis raidėmis, o jos elementai — mažosiomis (jie rašomi riestiniuose skliaustuose).
Tuščioji aibė neturi nė vieno elemento.
Tuščioji aibė žymima $\varnothing$.

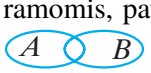
Skaičiaus 6 daliklių aibė:
$D = \{1; 2; 3; 6\}$.
Skaičiaus 6 kartotinių, mažesnių už 20, aibė:
$K = \{6; 12; 18\}$.
(Natūraliojo skaičiaus daliklių ir kartotinių aibes sudaro natūralieji skaičiai.)

Aibių A ir B sąjunga — aibė, sudaryta iš visų A ir B elementų. *Rašoma*: $A \cup B$.
Aibių A ir B sankirta — aibė, sudaryta iš visų bendrųjų A ir B elementų. *Rašoma*: $A \cap B$.
Jei aibės A visi elementai yra ir aibės B elementai, tai A yra B poaibis. *Rašoma*: $A \subset B$.
Aibės A poaibiu laikoma ir pati aibė A, ir tuščioji aibė $\varnothing$.

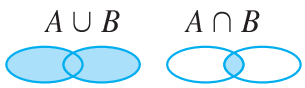
$D \cup K = \{1; 2; 3; 6; 12; 18\}$.

$D \cap K = \{6\}$.

$\{2; 6\} \subset D$, $\{2; 6\} \not\subset K$.
$A \subset A$, $\varnothing \subset A$.

Aibės ir jų veiksmai kartais yra vaizduojamos diagramomis, pavyzdžiui,


— A ir B turi bendrų elementų.



Skaičių aibės

Objektų kiekis nurodomas *natūraliaisiais skaičiais*.

$\boldsymbol{N} = \{1; 2; 3; ...\}$.

Sveikieji skaičiai — natūralieji skaičiai, jiems priešingi skaičiai ir nulis.

$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{N} \cup -\boldsymbol{N} \cup \{0\} =$
$= \{...; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ...\}$.

Dydžio lygių dalių kiekis nurodomas trupmeniniais skaičiais $\frac{m}{n}$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$.
Trumpena $\frac{m}{n}$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$, vadinama *paprastąja trupmena*. Paprastąją trupmeną galima užrašyti jai lygia dešimtaine trupmena:
- arba *baigtine*;
- arba *begalinė periodine*.

$\boldsymbol{T} = \left\{\frac{m}{n},\ m \in \boldsymbol{Z},\ n \in \boldsymbol{N},\ n > 1,\ \frac{m}{n} \notin \boldsymbol{Z},\right.$
$\left.m \text{ ir } n \text{ neturi bendrų daliklių}\right\}$.

$\frac{2}{5} = 0{,}4$; $\frac{-11}{8} = -\frac{11}{8} = -1{,}375$.
$\frac{2}{3} = 0{,}(6)$; $\frac{-11}{7} = -\frac{11}{7} = -1{,}(571428)$.

Racionalieji skaičiai — sveikieji skaičiai ir jiems nelygios nesuprastinamos paprastosios trupmenos. Bet kurį racionalųjį skaičių galima užrašyti paprastąja trupmena $\frac{m}{n}$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$.

$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Z} \cup \boldsymbol{T} = \left\{\frac{m}{n},\ m \in \boldsymbol{Z},\ n \in \boldsymbol{N}\right\}$.

$2{,}4 = 2\frac{4}{10} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$.

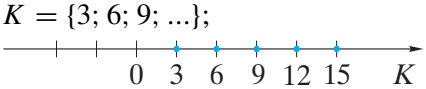
Ne visus dydžius galima nurodyti racionaliaisiais skaičiais. Prisireikia skaičių, kurių negalima užrašyti paprastąja trupmena $\frac{m}{n}$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$. Jie vadinami *iracionaliaisiais skaičiais*.
Iracionalųjį skaičių rašant dešimtaine trupmena, gaunama *begalinė neperiodinė dešimtainė trupmena*.

$\boldsymbol{I} = \left\{a \neq \frac{m}{n},\ m \in \boldsymbol{Z},\ n \in \boldsymbol{N}\right\}$.
$\sqrt{2} = 1{,}414213...$,
$\pi = 3{,}1415...$,
$\log_3 10 = 2{,}095903...$,
$5^{\frac{3}{4}} = 3{,}343701...$.

Realieji skaičiai — racionalieji skaičiai ir iracionalieji skaičiai.

$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q} \cup \boldsymbol{I}$.

Skaičių aibė gali būti nusakyta:
- žodžiais;
- surašant jos skaičius ar skaičių intervalus;
- vaizduojant jos skaičius skaičių tiesėje;
- reiškiniu, kurio reikšmės yra tos aibės skaičiai.

Skaičiaus 3 kartotinių aibė K:
- $K =$ {Natūralieji skaičiai, kurie dalijasi iš 3};
- $K = \{3; 6; 9; ...\}$;
- 

- $K = \{3n, n \in \boldsymbol{N}\}$.

Apibendriname

Veiksmai su skaičiais

Su skaičiais atliekami matematiniai veiksmai (operacijos):

- sudėtis $(a + b = c)$;
- atimtis $(c - b = a)$;
- daugyba $(a \cdot b = c)$;
- dalyba $(c : b = a)$;
- kėlimas laipsniu $(a^n = b)$;
- šaknies traukimas $(\sqrt[n]{b} = a)$;
- logaritmavimas $(\log_a b = n)$.

$2 + 3 = 5$,
$5 - 3 = 2$,
$2 \cdot 3 = 6$,
$6 : 3 = 2$,
$2^3 = 8$,
$\sqrt[3]{8} = 2$,
$\log_2 8 = 3$.

Šaknys

Nelyginio laipsnio $2n + 1$ $(n \in \boldsymbol{N})$ šaknis iš skaičiaus a yra skaičius $\sqrt[2n+1]{a}$, kurio $(2n + 1)$-asis laipsnis yra a:
$\left(\sqrt[2n+1]{a}\right)^{2n+1} = a$.

$\sqrt[3]{5}$ yra skaičius, kurio 3-iasis laipsnis lygus 5, t. y.
$\left(\sqrt[3]{5}\right)^3 = 5$.

Lyginio laipsnio $2n$ $(n \in \boldsymbol{N})$ šaknis iš neneigiamojo skaičiaus a yra neneigiamasis skaičius $\sqrt[2n]{a}$, kurio $2n$-asis laipsnis lygus a:
$\left(\sqrt[2n]{a}\right)^{2n} = a$.

$\sqrt[6]{3}$ yra skaičius, kurio 6-asis laipsnis lygus 3, t. y.
$\left(\sqrt[6]{3}\right)^6 = 3$.

Lyginio laipsnio šaknis iš neigiamojo skaičiaus neturi prasmės, t. y.: $\sqrt[2n]{a} \geqslant 0$, $a \geqslant 0$.

$\sqrt[4]{10} > 0$.

Jei $\sqrt[n]{a} = b$, tai $b^n = a$.

$\sqrt[3]{8} = 2$, nes $2^3 = 8$;
$\sqrt[4]{16} = 2$, nes $2^4 = 16$ ir $2 > 0$.

Laipsniai

$a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ dauginamųjų}}$, kai $n \in \boldsymbol{N}$;
$a^1 = a$;
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, kai $n \in \boldsymbol{N}$, $a \neq 0$;
$a^0 = 1$, kai $a \neq 0$;
$a^{\frac{m}{n}}$, kai $a > 0$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$, $n > 1$, yra skaičius, kurio n-asis laipsnis lygus a^m.
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, kai $a > 0$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$, $n > 1$.

$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$,
$4^1 = 4$,
$4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$, $4^{-1} = \frac{1}{4}$,
$4^0 = 1$,

$4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16}$.

Logaritmai

Teigiamojo skaičiaus b logaritmas pagrindu a $(a > 0, a \neq 1)$ yra skaičius $\log_a b$, kuriuo pakėlę a gauname b:
$a^{\log_a b} = b$.
Jei $\log_a b = c$, tai $a^c = b$.

$\log_2 8$ yra skaičius, kuriuo pakėlę 2 gauname 8, t. y.
$2^{\log_2 8} = 8$.
$\log_2 8 = 3$, nes $2^3 = 8$.

Laipsnių, šaknų ir logaritmų savybės

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, $a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$,
$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$,
$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$, $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$.

$2^3 \cdot 2^4 = 2^7$, $2^3 : 2^4 = 2^{-1}$,
$\left(2^3\right)^4 = 2^{12}$, $2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3}$,
$(2 \cdot 5)^3 = 2^3 \cdot 5^3$, $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3}$.

$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$,

$\sqrt[3]{2 \cdot 8} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{8}$, $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}$,

$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$, $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n \cdot k]{a}$,

$2\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 4} = \sqrt[3]{32}$, $\sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt[6]{8}$,

$\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$, $\sqrt[n \cdot k]{a^k} = \sqrt[n]{a}$.

$\sqrt[3]{4} = \left(\sqrt[3]{2}\right)^2$, $\sqrt[10]{32} = \sqrt[10]{2^5} = \sqrt{2}$.

$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$,

$\log_2(16 \cdot 4) = \log_2 16 + \log_2 4$,

$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$,

$\log_2 \frac{16}{4} = \log_2 16 - \log_2 4$,

$\log_a \left(x^k\right) = k \cdot \log_a x$; čia $x, y > 0$.

$\log_2 9 = \log_2 \left(3^2\right) = 2 \cdot \log_2 3$.

90. 1) Raskite lygties $36x - x^2 = 0$ sprendinių aibę A.
2) Raskite nelygybės $\sqrt{25} < x \leqslant \sqrt{64}$ sprendinių aibę B.
3) Raskite aibių A ir B sąjungą C.
4) Raskite aibių A ir B sankirtą D.
5) Parašykite kurį nors aibės C poaibį E.

91. Mėdininkuose yra buvę 7 klasės mokiniai, o Trākuose — 18. Ir Mėdininkuose, ir Trākuose pabuvojo 2 iš jų.
a) Kiek mažiausiai mokinių mokosi šioje klasėje?
b) Kiek klasėje yra mokinių, jeigu dar 3 klasės mokiniai nėra buvę nei Mėdininkuose, nei Trākuose?

92. 17 klasės vienuoliktokų domisi krepšiniu, 11 — futbolu, o 7 — ir krepšiniu, ir futbolu. Dar 4 šios klasės vienuoliktokai abejingi šioms sporto šakoms.
a) Kiek klasėje yra vienuoliktokų?
b) Kiek vienuoliktokų domisi tik krepšiniu? tik futbolu?

93. Nubraižykite du skirtingų spindulių skritulius taip, kad jų sankirta būtų:
a) vienas taškas; b) tuščia aibė; c) mažesnysis iš skritulių.

94. Apskaičiuokite reiškinio reikšmę.
a) $2{,}5 \cdot 1\frac{1}{3} \cdot (-3) + 5{,}3 : \left(-\frac{1}{10}\right)$; b) $14 - 7 \cdot \left(3 - 2{,}1 : (-7)\right) - 2\frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{2}$;
c) $\left(12\frac{1}{4} - 0{,}4 \cdot \frac{1}{4}\right) : \left(-3\frac{1}{2} + 5 \cdot 0{,}4\right)$; d) $-\frac{3}{2} : \left(-\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}\right)$.

95. Kurios šių šaknų neturi prasmės?
$\sqrt[3]{-27}$; $\sqrt{-25}$; $\sqrt[5]{-32}$; $\sqrt[4]{-1}$; $\sqrt[6]{0}$; $\sqrt[3]{7}$; $\sqrt{3}$.

96. Apskaičiuokite reiškinio su šaknimis reikšmę.
a) $\sqrt[3]{64} + \sqrt[5]{32}$; b) $\sqrt[5]{-32} + \sqrt[4]{81}$; c) $\sqrt{(-4)^2} - \sqrt{(-7)^4}$; d) $\sqrt{(-3)^6} - \sqrt[3]{(-3)^9}$;
e) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} - \sqrt[5]{(-2)^5}$; f) $\sqrt[3]{\sqrt{8}} - \frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[4]{2}}$; g) $\sqrt{2\sqrt[4]{32}} + \sqrt[3]{-8} \cdot \sqrt[8]{2}$; h) $\left(\frac{\sqrt[4]{125}}{\sqrt{5}}\right)^8 + \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{2\frac{1}{4}}}$.

97. Apskaičiuokite reiškinio su laipsniais reikšmę.
a) $3^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$; b) $0{,}3^0 - 0{,}1^{-4}$; c) $0{,}5^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$; d) $2^{-3} - (-2)^{-4}$;
e) $2^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$; f) $-0{,}5^0 : \left(\frac{2}{3}\right)^2$; g) $-4^3 \cdot 8^{-2}$; h) $(-9)^2 : \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}$;
i) $3^{-4} \cdot 3^6$; j) $(-0{,}3)^5 : (-0{,}3)^3$; k) $\left(5^2\right)^{-2} \cdot 5^3$; l) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} : \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{-3}$;
m) $0{,}25^{-2} \cdot 2^{-2}$; n) $\left(\frac{5}{2}\right)^{-9} : 2{,}5^{-9}$; o) $\left(\frac{5}{7}\right)^9 \cdot 1{,}4^9$; p) $0{,}2^3 : \left(\frac{1}{25}\right)^3$;
r) $\frac{2^4}{2^{-5} \cdot 2^6}$; s) $\frac{3^{-10} \cdot 3^{16}}{(-3)^2}$; t) $\frac{5^{-5} \cdot 5^{20}}{5^9}$; u) $\frac{\left(2^3\right)^5 \cdot \left(2^{-6}\right)^2}{\left(2^2\right)^2}$.

98. Apskaičiuokite.
a) $4 \cdot 125^{\frac{1}{3}}$; b) $4 \cdot 16^{\frac{1}{4}}$; c) $-2 \cdot 8^{-\frac{1}{3}}$; d) $-24 \cdot 64^{-\frac{1}{2}}$;
e) $(81 \cdot 16)^{\frac{1}{4}}$; f) $(27 \cdot 8)^{\frac{1}{3}}$; g) $\left(\frac{1}{125} \cdot \frac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{3}}$; h) $\left(0{,}01 \cdot \frac{1}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}$;
i) $\frac{9^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{3}}}{36^{\frac{1}{2}}}$; j) $\frac{8^{\frac{2}{3}} \cdot 27^{\frac{2}{3}}}{16^{\frac{1}{4}}}$; k) $\frac{4^{-\frac{1}{2}} \cdot 27^{-\frac{1}{3}}}{\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}}$; l) $\frac{125^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{2}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}}$.

99. Duoti laipsniai: $27^{\frac{2}{3}}$ ir $\left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{1}{2}}$. Užrašykite laipsniu, kurio pagrindas būtų lygus 3, šių laipsnių:
a) sandaugą; b) dalmenį.

100. Duoti laipsniai: 2^{2012} ir 2^{2011}. Užrašykite laipsniu, kurio pagrindas būtų lygus 2, šių laipsnių:
a) skirtumą; b) sandaugą; c) dalmenį.

101. Duoti skaičiai:
$a = 10^{4,5} : 10^{-2,5}$; $b = 2^7 \cdot 5^7$; $c = 1 \cdot 10^7$; $d = \frac{1}{10^7}$; $e = \frac{10^{-1,5}}{10^{-8,5}}$.
Kurie jų yra lygūs?

102. Suprastinkite reiškinį.
a) $1{,}5ab^{-3} \cdot 6a^{-2}b$; b) $3{,}2x^{-1}y^{-5} \cdot \frac{5}{8}xy$; c) $\frac{3}{4}(m^{-1})^2 n^4 \cdot 8m^3 n^{-2}$;
d) $3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{3}a^{\frac{1}{3}}b^{1\frac{1}{2}}$; e) $2{,}5x^{\frac{2}{5}}y^{-\frac{3}{4}} \cdot 4x^{-\frac{3}{5}}y$; f) $\frac{3}{8}(m^{\frac{2}{3}})^3 n^{\frac{1}{2}} \cdot 4m^0 \cdot n^{-\frac{1}{2}}$.

103. Reiškinį užrašykite laipsniu su trupmeniniu rodikliu.
a) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{a^3}$; b) $\sqrt[7]{a^3} \cdot \sqrt[4]{a}$; c) $\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{a}}$; d) $\sqrt[5]{a^3\sqrt[7]{a^5}}$.

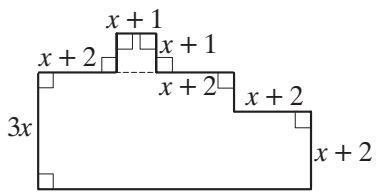
104. Apskaičiuokite.
a) $2\log_2 2 + \lg 0{,}0001 - \left(3^{\log_3 2}\right)^2$;
b) $\log_{\sqrt{2}} 1 - \log_5 (5^3) + (\lg 100)^2 + 10^{\lg 0{,}5}$;
c) $\log_5 8 + \log_5 10 - 4\log_5 2$;
d) $\left(\log_{0,3} 9 - 2\log_{0,3} 10\right) \cdot \left(\log_{0,5} 2 + 3\log_{0,5} 1\right)$;
e) $(\lg 72 - \lg 9) : (\lg 28 - \lg 7)$;
f) $\left(2\log_{\frac{1}{2}} 4 - \log_{\frac{1}{2}} 32\right)^3 + 3\lg 1 \cdot 2\lg 0{,}4$.

105. Nustatykite, kas turėtų būti parašyta vietoj x, kad lygybė būtų teisinga.
a) $\log_3 x = \log_3 2 + \log_3 4$;
b) $\log_{0,2} x = \log_{0,2} \frac{3}{7} + \log_{0,2} 7$;
c) $\log_7 x = \log_7 12 - \log_7 4$;
d) $\log_{\frac{2}{3}} x = \log_{\frac{2}{3}} 8 - \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{4}$.

$\log_2 x = \log_2 5 + \log_2 3$.
Lygybės dešiniojoje pusėje esančiam reiškiniui taikome savybę $\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$:
$\log_2 x = \log_2 (5 \cdot 3)$, $\Rightarrow$ $\log_2 x = \log_2 15$.
To paties pagrindo logaritmai yra lygūs, kai lygūs jų pologaritminiai reiškiniai.
Taigi $x = 15$.

106. Apskaičiuokite reiškinio reikšmę.
a) $3 + 3 \cdot \sqrt{9} - 3^2 : \log_3 3$;
b) $8 - 2 \cdot 8^{\frac{1}{3}} + 3 \cdot \sqrt[3]{-8} + 2 \cdot \log_5 \frac{1}{5}$;
c) $6 + \left(3\log_4 \frac{1}{16} - 2^0\right) \cdot (-2)^3$;
d) $-5^2 - \left(4^{\frac{1}{2}} - \log_2 64 : \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\right)$.

107. 1) Figūros kraštinių ilgiai nurodyti paveiksle. Užrašykite reiškiniu šios figūros:
a) perimetrą $P(x)$; b) plotą $S(x)$.
2) Apskaičiuokite $P(x)$ ir $S(x)$ reikšmes, kai:
a) $x = 1$ cm; b) $x = 3$ cm; c) $x = 5$ dm.



108. Dviženklio skaičiaus vienetų skaitmuo lygus x, o dešimčių skaitmuo yra 5 vienetais didesnis už vienetų skaitmenį. Užrašykite reiškiniu:
a) šį dviženklį skaičių;
b) šio dviženklio skaičiaus ir skaičiaus, parašyto tais pačiais skaitmenimis, bet atvirkščia tvarka, skirtumą.

109. Jonas gali nupjauti pievą per x valandų, o Petras — dviem valandomis greičiau negu Jonas. Užrašykite:
a) kurią pievos dalį gali nupjauti per vieną valandą Jonas ir kurią — Petras;
b) per kiek laiko nupjautų šią pievą abu vaikinai, dirbdami kartu.

110. Ar lygybė yra tapatybė?
a) $a^4 + a^2 + 1 = (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$; b) $b^4 + 4 = (b^2 - 2b + 2)(b^2 + 2b + 2)$.

111. Raskite reiškinio apibrėžimo sritį.
a) $\frac{1}{x+1}$; b) $\frac{1}{x^2-9}$; c) $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$; d) $\sqrt[3]{x-1}$; e) $\frac{2}{\sqrt[3]{x-1}}$; f) $\frac{x}{\sqrt{x}-1}$; g) $\log_2(x+2)$; h) $\lg(3-x)$.

112. Sandėlyje buvo 300 kg grybų. 99 % šių grybų masės sudarė vanduo. Grybams truputį pradžiūvus, vanduo sudarė 98 % pradžiūvusių grybų masės. Kiek svėrė pradžiūvę grybai?

Laipsnių savybių įrodymai

Įrodykime, kad laipsnių su vienodais pagrindais sandauga yra lygi laipsniui, kurio pagrindas tas pats, o rodiklis lygus laipsnių rodiklių sumai:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Įrodymas remiasi laipsnio su natūraliuoju rodikliu apibrėžimu. Kadangi:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ dauginamųjų}}, \quad a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ dauginamųjų}},$$

tai

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ dauginamųjų}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ dauginamųjų}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n+m \text{ dauginamųjų}} = a^{n+m}.$$

1 užduotis. Įrodykite, kad laipsnių su vienodais pagrindais dalmuo yra lygus laipsniui, kurio pagrindas tas pats, o rodiklis lygus laipsnių rodiklių skirtumui:

$$a^n : a^m = a^{n-m}.$$

Įrodykime, kad laipsnių su vienodais rodikliais sandauga yra lygi laipsniui tuo pačiu rodikliu, o pagrindas lygus laipsnių pagrindų sandaugai:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n.$$

Įrodymas remiasi laipsnio su natūraliuoju rodikliu apibrėžimu:

$$a^n \cdot b^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ dauginamųjų}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ dauginamųjų}} = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{n \text{ dauginamųjų } (a \cdot b)} = (a \cdot b)^n.$$

2 užduotis. Įrodykite, kad laipsnių su vienodais rodikliais dalmuo yra lygus laipsniui tuo pačiu rodikliu, o pagrindas lygus laipsnių pagrindų dalmeniui:

$$a^n : b^n = (a : b)^n \quad \text{arba} \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Įrodykime, kad laipsnį pakėlę laipsniu gauname laipsnį, kurio pagrindas tas pats, o rodiklis lygus laipsnių rodiklių sandaugai:

$$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}.$$

Įrodymas remiasi laipsnio su natūraliuoju rodikliu apibrėžimu:

$$\left(a^n\right)^m = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ dauginamųjų}}{}^m = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot \ldots \cdot a) \cdot \ldots \cdot (a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ dauginamųjų } (\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ dauginamųjų}})} = a^{n \cdot m}.$$

Šaknų savybių įrodymai

Įrodykime, kad n-ojo laipsnio šaknis iš sandaugos yra lygi n-ojo laipsnio šaknų iš dauginamųjų sandaugai:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

Reiškinių $\sqrt[n]{a \cdot b}$ ir $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ n-ieji laipsniai yra lygūs, todėl lygūs ir patys reiškiniai. Iš tikrųjų:

$$\left(\sqrt[n]{a \cdot b}\right)^n = a \cdot b; \quad \left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = a \cdot b.$$

3 užduotis. Įrodykite, kad n-ojo laipsnio šaknis iš dalmens yra lygi n-ojo laipsnio šaknų iš dalinio ir daliklio dalmeniui:

$$\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} \quad \text{arba} \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Įrodykime, kad dauginamąjį įkeldami po šaknies ženklu tą dauginamąjį keliame šaknies laipsniu:

$$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}.$$

Iš tikrųjų:

$$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}.$$

4 užduotis. Remdamiesi lygybėmis $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, įrodykite šias šaknų savybes:

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n \cdot k]{a}; \quad \sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k; \quad \sqrt[n \cdot k]{a^k} = \sqrt[n]{a}.$$

Logaritmų savybių įrodymai

Įrodykime, kad sandaugos logaritmas lygus dauginamųjų logaritmų sumai:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y.$$

1) Įsitikinkime, kad laipsniai

$$a^{\log_a(x \cdot y)} \quad \text{ir} \quad a^{\log_a x + \log_a y}$$

yra lygūs:

$$a^{\log_a(x \cdot y)} = x \cdot y; \quad a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = x \cdot y.$$

Vadinasi, $a^{\log_a(x \cdot y)} = a^{\log_a x + \log_a y}$.

2) Laipsniai $a^{\log_a(x \cdot y)}$ ir $a^{\log_a x + \log_a y}$ yra lygūs ir jų pagrindai (a) taip pat lygūs, todėl lygūs ir šių laipsnių rodikliai, t. y.

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y.$$

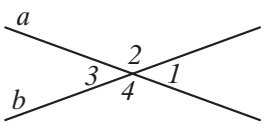
5 užduotis. Įrodykite šias logaritmų savybes:

$$\log_a(x : y) = \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y; \quad \log_a\left(x^n\right) = n \cdot \log_a x.$$

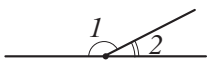
Tiesės ir kampai

113. 1) Nubrėžkite tiesę a ir šalia jos pažymėkite tašką B.
2) Per tašką B nubrėžkite tiesę b taip, kad:
a) tiesės a ir b būtų lygiagrečios; b) tiesė b kirstų tiesę a; c) tiesės a ir b būtų statmenos.
3) Išmatavę užrašykite, koks atstumas milimetrais yra:
a) nuo taško B iki tiesės a; b) tarp lygiagrečių tiesių a ir b.
4) Išmatavę užrašykite, koks yra kampo tarp susikertančių tiesių a ir b dydis.

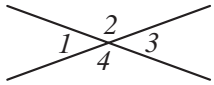
114. Susikirtus dviem tiesėms, susidarė keturi kampai. Jie pažymėti skaitmenimis.



1) Surašykite kampus, gretutinius kampui 1.
2) Surašykite kryžminių kampų poras.
3) Apskaičiuokite $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$, jei $\angle 1 = 40°$.

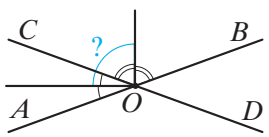


$\angle 1$ ir $\angle 2$ — gretutiniai,
$\angle 1 + \angle 2 = 180°$.

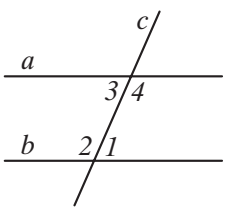


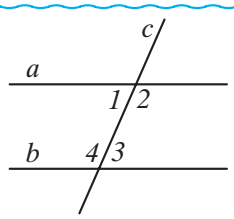
$\angle 1$ ir $\angle 3$ — kryžminiai,
$\angle 2$ ir $\angle 4$ — kryžminiai,
$\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$.

115. Tiesės AB ir CD kertasi taške O. Apskaičiuokite kampo tarp kampų AOC ir COB pusiaukampinių dydį.



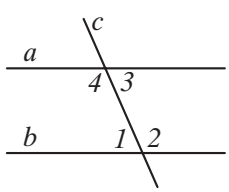
116. Tiesės a ir b yra lygiagrečios, c — kirstinė, $\angle 1 = 82°$. Apskaičiuokite $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$.



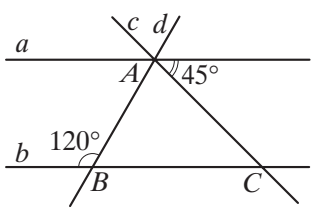


$a \parallel b$, c — kirstinė,
$\angle 1$ ir $\angle 4$, $\angle 2$ ir $\angle 3$ — vienašaliai,
$\angle 1 + \angle 4 = \angle 2 + \angle 3 = 180°$,
$\angle 1$ ir $\angle 3$, $\angle 2$ ir $\angle 4$ — priešiniai,
$\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$.

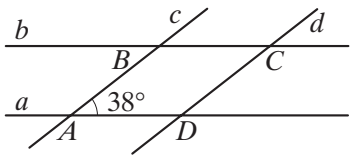
117. Dvi lygiagrečias tieses a ir b kerta tiesė c.
Apskaičiuokite $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ ir $\angle 4$, jei $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 260°$.



118. Remdamiesi brėžinio duomenimis ($a \parallel b$), apskaičiuokite trikampio ABC kampų dydžius.



119. Dvi lygiagrečias tieses a ir b kerta kitos dvi lygiagrečios tiesės c ir d. Apskaičiuokite kampų ABC, BCD ir ADC dydžius, kai $\angle BAD = 38°$.



Procentai

120. Agnė su Tadu nuėjo į parduotuvę. Kiekvienas jų turėjo po 100 eurų.
1) Kiek eurų parduotuvėje išleido Tadas, jei jis išleido 20 % savo turėtų pinigų?
2) Kiek procentų savo turėtų pinigų parduotuvėje išleido Agnė, jei ji išleido 35 eurus?
3) Keliais eurais ir keliais procentais daugiau pinigų išleido Agnė negu Tadas?
4) Keliais eurais ir keliais procentais mažiau pinigų išleido Tadas negu Agnė?

121. Prekė kainavo x eurų.
1) Kiek kainuoja prekė dabar, jei ji pabrango 50 %?
2) Kiek kainavo prekė iki pabrangimo, jei sudėję jos naująją ir senąją kainas gauname 180 eurų?

Dydį A padidinę p %, gauname $A + A \cdot \frac{p}{100} = A \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$.
Dydį A sumažinę p %, gauname $A - A \cdot \frac{p}{100} = A \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$.
Skaičių 10 padidinę 20 %, gauname $10 + 10 \cdot \frac{20}{100} = 10\left(1 + \frac{20}{100}\right) = 10 \cdot 1{,}2 = 12$.
Skaičių 10 sumažinę 20 %, gauname $10 - 10 \cdot \frac{20}{100} = 10\left(1 - \frac{20}{100}\right) = 10 \cdot 0{,}8 = 8$.

122. Prekė kainavo y eurų.
1) Kiek kainuoja prekė dabar, jei ji atpigo 20 %?
2) Kiek kainuoja prekė dabar, jei jos senosios ir dabartinės kainų skirtumas lygus 15 Eur 60 ct?

123. Prekė kainavo 1000 Eur. Kiek kainuoja prekė dabar, jei jos kaina keitėsi taip:
a) iš pradžių padidėjo 50 %, o tada sumažėjo 50 %?
b) iš pradžių sumažėjo 60 %, o tada padidėjo 60 %?
c) iš pradžių padidėjo 40 %, o tada vėl padidėjo 40 %?
d) iš pradžių sumažėjo 10 %, o tada sumažėjo 20 %?

Teigiamas dydis A keitėsi taip:
1) iš pradžių padidėjo 20 %; 2) tada sumažėjo 30 %; 3) ir galiausiai padidėjo 50 %.
Dabartinė dydžio A reikšmė lygi $A \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot 1{,}5 = 1{,}26 \cdot A$.
Vadinasi, dydis A padidėjo 26 %.

124. Miestelio gyventojų skaičius pastaruosius dvejus metus iš eilės didėjo po 20 % kasmet.
a) Kiek miestelyje gyvena žmonių dabar, jei prieš dvejus metus jų buvo 2600?
b) Kiek miestelyje gyveno žmonių prieš dvejus metus, jei dabar jų gyvena 8640?

Jei teigiamas dydis A ***padidėja*** n kartų po p procentų (kiekvieną kartą procentus skaičiuojant nuo padidėjusios dydžio A reikšmės), tai po n kartų dydžio A reikšmė bus lygi

$$A_n = A \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Jei teigiamas dydis A ***sumažėja*** n kartų po p procentų, tai

$$A_n = A \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n.$$

125. Automobilio vertė kasmet sumažėja 10 %, palyginti su jo verte metų pradžioje.
a) Kiek kainuoja automobilis dabar, jei prieš dvejus metus jis kainavo 40 000 Eur?
b) Kiek kainavo automobilis prieš trejus metus, jei dabar jo kaina lygi 72 900 Eur?

Testas

126. Nelygybės $x > -4$ sveikieji neigiamieji sprendiniai yra:

A $(-4; 0)$ **B** $(-4; 0]$ **C** $\{-4; -3; -2; -1\}$ **D** $\{-3; -2; -1\}$ **E** $\{-3; -2; -1; 0\}$

127. Lygties $3x^2 - 5x = 0$ sprendinių aibė yra:

A $\left\{0; \frac{5}{3}\right\}$ **B** $\left\{0; \frac{3}{5}\right\}$ **C** $\left\{-\frac{3}{5}; 0\right\}$ **D** $\left\{-\frac{5}{3}; 0\right\}$ **E** $\left\{-\frac{5}{3}; \frac{3}{5}\right\}$

128. Duotos aibės $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{1; 4\}$. Kuris teiginys yra teisingas?

A $A \cup B = B$ **B** $A \cap B = A$ **C** $A \subset B$ **D** $B \subset A$ **E** $A = B$

129. $\frac{2}{3} - \frac{3}{4} =$

A $\frac{1}{12}$ **B** $\frac{5}{12}$ **C** $-\frac{7}{12}$ **D** -1 **E** $-\frac{1}{12}$

130. $4^{-4} \cdot 4^5 : 4^{-2} =$

A 4^{-1} **B** 4^3 **C** 4^{-11} **D** 4^{-7} **E** 4

131. Su kuriomis x reikšmėmis reiškinys $\sqrt{x-1}$ turi prasmę?

A $x = 1$ **B** $x \in (1; +\infty)$ **C** $x \in (-\infty; +\infty)$ **D** $x \in (-\infty; 1]$ **E** $x \in [1; +\infty)$

132. Su kuriomis x reikšmėmis reiškinys $\sqrt[3]{x-1}$ turi prasmę?

A $x = 1$ **B** $x \in (1; +\infty)$ **C** $x \in (-\infty; +\infty)$ **D** $x \in (-\infty; 1]$ **E** $x \in [1; +\infty)$

133. $\sqrt[3]{a^{-2}} =$

A $a^{\frac{2}{3}}$ **B** $a^{\frac{3}{2}}$ **C** $a^{-\frac{3}{2}}$ **D** $a^{-\frac{1}{2}}$ **E** $a^{-\frac{2}{3}}$

134. $\log_y x$ turi prasmę, kai:

A $x > 0$, $y > 0$ **B** $x > 0$, $y > 1$ **C** $x > 0$, $y > 0$, $y \neq 1$

D $x > 0$, $y > 0$, $x \neq 1$ **E** $x > 0$, $y > 0$, $x \neq 1$, $y \neq 1$

135. $\log_2 4 + \log_2 8 - \log_2 16 - 2\log_2 2 =$

A 0 **B** -2 **C** $\log_2 3$ **D** 1 **E** -1

136. $\left(4 \cdot 125^{\frac{2}{3}} - 7{,}3^0\right) : \left(\log_4 64 + \sqrt{36}\right) =$

A $11\frac{1}{9}$ **B** 11 **C** -11 **D** 10 **E** -10

137. Sudauginkite $\left(\sqrt{13} - 3\right) \cdot \left(\sqrt{13} + 3\right)$.

A 160 **B** 27 **C** 22 **D** $178 - 6\sqrt{13}$ **E** 4

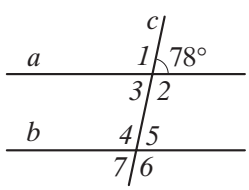
138. Kokia yra reiškinio $\sqrt[3]{a} - a^2$ reikšmė, kai $a = -1$?

A 0 **B** 2 **C** -1 **D** -2 **E** Reiškinys neturi prasmės

139. Reiškinys $(x - y)^2$ tapačiai lygus reiškiniui:

A $(x - y)(x + y)$ **B** $-(x + y)^2$ **C** $-(x - y)^2$ **D** $(-x - y)^2$ **E** $(y - x)^2$

140. Lygiagrečios tiesės a ir b perkirstos kirstine c (žr. pav.).



a) $\angle 7 =$

A $78°$ **B** $12°$ **C** $102°$ **D** $282°$ **E** Nustatyti neįmanoma

b) $\angle 6 =$

A $78°$ **B** $12°$ **C** $102°$ **D** $282°$ **E** Nustatyti neįmanoma

141. Skaičius $a = 8$, skaičius $b = 10$.

a) Kiek procentų skaičiaus b sudaro skaičius a?

A $8\,\%$ **B** $10\,\%$ **C** $80\,\%$ **D** $100\,\%$ **E** $125\,\%$

b) Keliais procentais skaičius a yra mažesnis už skaičių b?

A $2\,\%$ **B** $8\,\%$ **C** $20\,\%$ **D** $25\,\%$ **E** $80\,\%$

142. Raskite lygties sprendinių aibę.

a) $2x - 8 = 12 - 2x$; b) $2x^2 = 0$; c) $3x^2 - 3 = 0$; d) $x^2 = 9$;

e) $x^2 - 4x + 4 = 0$; f) $x^2 = 2x - 10$; g) $\sqrt{x} = 9$; h) $\frac{x}{x-1} = 0$.

143. Raskite abiejų nelygybių sprendinių aibių sąjungą ir sankirtą.

a) $x - 3 < 0$, $2x \geqslant 3$; b) $-x - 10 \geqslant 0$, $-2x > 8$; c) $-\frac{x}{2} + 1 \leqslant \frac{1}{2}$, $\frac{x}{3} < 2$.

144. Užrašykite natūraliojo skaičiaus daliklių aibę D ir kartotinių aibę K.

a) 6; b) 9; c) 11; d) 32.

145. Raskite aibių A ir B sąjungą ir sankirtą, kai:

a) $A = \{5; 10; 15; 20; 25\}$, $B = \{0; 5; 25\}$; b) $A = \{0; 1; 4; 9\}$, $B = \{6; 12; 18\}$;

c) $A = [-5; 7]$, $B = [-2; 10]$; d) $A = (-10; 10]$, $B = (-\infty; 0]$.

146. Užrašykite aibės $A = (-5; 10]$ poaibį B, kuris būtų sudarytas iš:

a) visų natūraliųjų aibės A elementų; b) visų neteigiamų sveikųjų aibės A elementų.

147. Apskaičiuokite.

a) $-10 + 7$; b) $-\frac{3}{7} - \left(-\frac{4}{7}\right)$; c) $\frac{1}{3} - 1{,}6$; d) $\frac{3}{2} \cdot (-8)$; e) $-2\frac{1}{2} : (-4{,}2)$;

f) 2^{-3}; g) $4^{\frac{3}{2}}$; h) $\sqrt{121}$; i) $\sqrt[3]{-27}$; j) $\sqrt[4]{1}$;

k) $\log_2 8$; l) $\log_3 81$; m) $\log_4 \frac{1}{16}$; n) $\log_{\frac{3}{5}} 1$; o) $\lg \frac{1}{10}$.

148. Apskaičiuokite skaitinio reiškinio su laipsniais reikšmę.

a) $3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}}$; b) $3^{\frac{2}{3}} : 3^{-\frac{1}{3}}$; c) $\left(3^{\frac{2}{3}}\right)^3$; d) $\left(3^{\frac{2}{3}}\right)^{-3}$; e) $9^{\frac{2}{3}} \cdot 81^{\frac{2}{3}}$; f) $243^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{2}{3}}$.

149. Kokia turi būti x reikšmė, kad lygybė būtų teisinga?

a) $x^2 = 4$; b) $x^3 = \frac{1}{27}$; c) $x^4 = 1$; d) $x^5 = -1$;

e) $\sqrt{x} = 4$; f) $\sqrt[3]{x} = 2$; g) $\sqrt[4]{x} = 3$; h) $\sqrt[5]{x} = -1$;

i) $2^x = 4$; j) $2^x = \frac{1}{2}$; k) $5^x = 1$; l) $10^x = \frac{1}{100}$;

m) $\log_5 x = 1$; n) $\log_3 x = 0$; o) $\log_7 x = \frac{1}{2}$; p) $\lg x = -1$.

150. Su kuriomis x reikšmėmis reiškinys turi prasmę?

a) $\sqrt{x - 1}$; b) $\sqrt[3]{2x}$; c) $\sqrt[4]{2x + 6}$; d) $\sqrt[5]{-x}$;

e) $\log_5(2x)$; f) $\log_2(1 - x)$; g) $\log_x 5$; h) $\log_{2x-10} 10$.

151. Apskaičiuokite.

a) $\log_3 2 + \log_3 13{,}5$; b) $\log_2 2{,}5 - \log_2 5$; c) $\log_{\frac{1}{2}} 50 - 2\log_{\frac{1}{2}} 5$; d) $2\lg 2 + 2\lg 5$.

152. Apskaičiuokite reiškinio reikšmę.

a) $-10 + 3 \cdot \sqrt{16} - 5^2 : \log_5 \frac{1}{25}$; b) $\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{8}} - 3^0\right) \cdot \left(\lg 1 - 0{,}7 : \frac{1}{3}\right)$.

153. Atskliauskite ir sutraukite panašiuosius narius.

a) $a(a - 1) - \left(a^2 - 1\right) + 1$; b) $(3 - a)^2 - 3\left(a + a^2\right)$; c) $(2a - 1)(a + 1) - (a - 1)^2 + 2$.

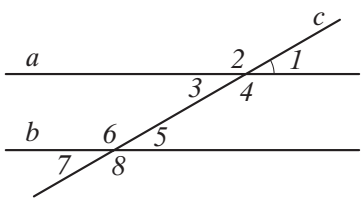
154. Apskaičiuokite reiškinio su kintamuoju reikšmę.

a) $x^2 - \sqrt[3]{x} + \log_2 x$, kai $x = 1$; $x = 8$; b) $y - y^{\frac{1}{2}}$, kai $y = 1$; $y = 4$; $y = 8$.

155. Tiesė c yra tiesių a ir b ($a \parallel b$) kirstinė, $\angle 1 = 30°$.

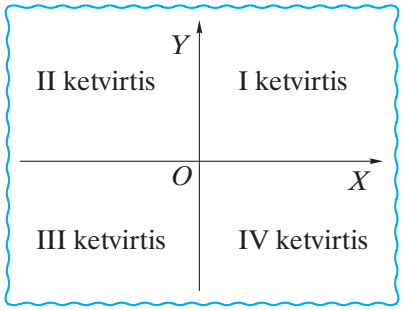
1) Koks yra $\angle 6$ dydis?

2) Keliais procentais $\angle 1$ mažesnis už $\angle 6$?



Kartojame tai, ko prireiks 2 skyriuje

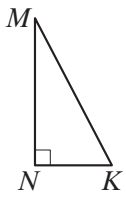
156. 1) Nubraižykite stačiakampę koordinačių plokštumą OXY.
2) Šioje koordinačių plokštumoje pažymėkite taškus: $A(2; -3)$, $B(-4; 1)$, $C(-3; -2)$, $D(2; 5)$.
3) Kuriam koordinačių plokštumos ketvirčiui priklauso kiekvienas šių taškų?
4) Pažymėkite tašką, simetrinį taškui:
a) A ašies OY atžvilgiu;
b) B ašies OX atžvilgiu;
c) C taško O atžvilgiu;
d) D tiesės $y = x$ atžvilgiu.
Užrašykite pažymėtų taškų koordinates.

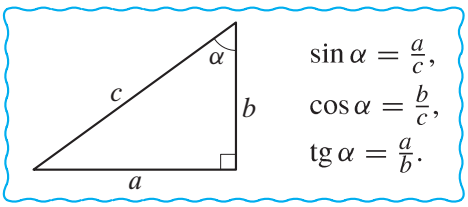


5) Kokia yra taško $M(x; y)$ koordinatė x (teigiama, neigiama ar lygi nuliui) ir koordinatė y, kai taškas M yra:
a) I ketvirtyje? b) II ketvirtyje? c) III ketvirtyje? d) IV ketvirtyje?
e) OX ašies dalyje, esančioje tarp I ir IV ketvirčių?
f) OY ašies dalyje, esančioje tarp I ir II ketvirčių?

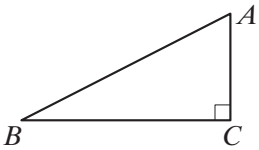
157. Trikampis MNK yra status.

1) Pabaikite lygybes.
a) $\sin\angle M = \ldots$; b) $\sin\angle K = \ldots$;
c) $\cos\angle M = \ldots$; d) $\cos\angle K = \ldots$;
e) $\operatorname{tg}\angle M = \ldots$; f) $\operatorname{tg}\angle K = \ldots$.
2) Apskaičiuokite $\triangle MNK$ smailiųjų kampų dydžius 1° tikslumu, kai $MK = 29$ mm, $MN = 21$ mm.





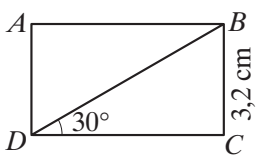
158. Apskaičiuokite stačiojo trikampio ABC ($\angle C = 90°$) nežinomus kraštinių ilgius (dešimtosios tikslumu) ir nežinomus kampų dydžius, kai:
a) $BC = 15$ cm, $\angle B = 30°$; b) $BC = 20$ cm, $\angle A = 45°$;
c) $AB = 73$ cm, $\angle B = 60°$; d) $AC = 10$ cm, $\angle A = 20°$;
e) $BC = 3{,}2$ cm, $\angle B = 80°$; f) $AB = 24$ cm, $\angle A = 50°$.

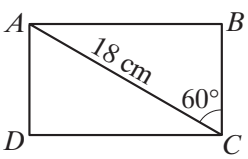


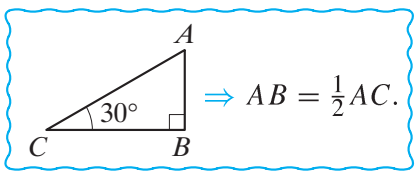
159. Apskaičiuokite reiškinio reikšmę.
a) $\sin 30° + \cos 60°$; b) $\sin 45° + \cos 45°$;
c) $\sin 60° + \cos 30°$; d) $\sin 30° + \operatorname{tg} 45°$;
e) $\cos 30° - \operatorname{tg} 30°$; f) $\operatorname{tg} 60° - \sin 60°$;
g) $-2 \cdot \sin 45° \cdot \cos 45°$; h) $\sin 60° \cdot \operatorname{tg} 60°$;
i) $(\sin 60° : \cos 60°)^2$; j) $(\cos 30° : \operatorname{tg} 60°) \cdot 4$.

$\angle A =$	$30°$	$45°$	$60°$
$\sin\angle A =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\angle A =$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\angle A =$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

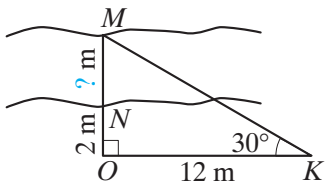
160. Remdamiesi brėžinio duomenimis, apskaičiuokite stačiakampio kraštinių ilgius (0,1 cm tikslumu) ir stačiakampio plotą (0,1 cm^2 tikslumu).

a)


b)




161. Apskaičiuokite upės plotį MN (1 m tikslumu), kai $NO = 2$ m, $KO = 12$ m, $\angle MKO = 30°$.



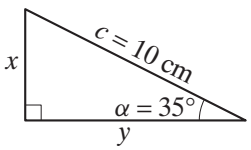
Sinusai, kosinusai, tangentai

2 skyrius

2.1. Posūkių kampai 44
2.2. Posūkio kampo sinusas 46
2.3. Posūkio kampo kosinusas 48
2.4. Posūkio kampo tangentas 50
2.5. Pagrindinė trigonometrinė tapatybė 52
2.6. Dar viena trikampio ploto formulė 54
2.7. Sinusų teorema 56
2.8. Kosinusų teorema 58
2.9. Įbrėžtiniai kampai 60
Apibendriname 62
Sprendžiame 64
Besidominties 66
Kai kurių trigonometrinių formulių įrodymai
Geometrijos uždaviniai. Trikampiai 68
Įvairūs uždaviniai. Judėjimo uždaviniai 69
Testas 70
Pasitikriname 71
Kartojame tai, ko prireiks 3 skyriuje 72

X klasėje nagrinėjome *smailiųjų* kampų sinusus, kosinusus ir tangentus. Juos apibrėžėme remdamiesi stačiaisiais trikampiais.

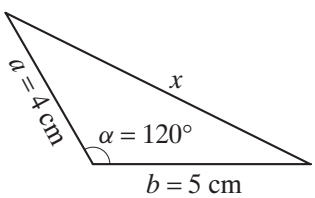
Daug dėmesio skyrėme stačiųjų trikampių sprendimui. Pavyzdžiui:



$$x = c \cdot \sin\alpha = 10 \cdot \sin 35^\circ \approx 10 \cdot 0{,}57 = 5{,}7\,(\text{cm});$$
$$y = c \cdot \cos\alpha = 10 \cdot \cos 35^\circ \approx 10 \cdot 0{,}82 = 8{,}2\,(\text{cm}).$$

Šiame skyriuje sužinosime, ką vadiname bet kokio kampo (ne tik smailiojo) sinusu, kosinusu ir tangentu. Apibrėždami šias sąvokas remsimės stačiakampe koordinačių plokštuma OXY ir vienetiniu apskritimu (jo centras $O(0;\,0)$, spindulys lygus 1).

Taip pat daug dėmesio skirsime trikampių, kurie nėra statūs, sprendimui. Pavyzdžiui:



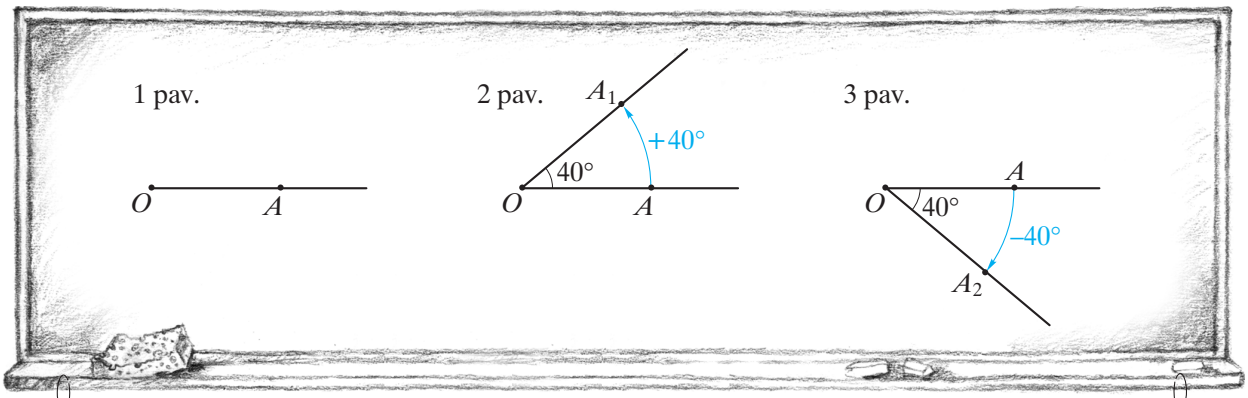
$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha,$$
$$x^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ = 16 + 25 - 40 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) = 61,$$
$$x = \sqrt{61} \approx 7{,}8\,(\text{cm}).$$

2.1. Posūkių kampai

Šiame atverstinyje susipažinsime su kampais, kurie gaunami sukant spindulį apie jo pradžios tašką.

Lentoje pavaizduotas spindulys OA (žr. 1 pav.) ir du kampai:

- $\angle AOA_1$, gautas spindulį OA pasukus apie jo pradžios tašką O prieš laikrodžio rodyklę (žr. 2 pav.);
- $\angle AOA_2$, gautas spindulį OA pasukus apie jo pradžios tašką O pagal laikrodžio rodyklę (žr. 3 pav.).



Kampas, kurį gauname sukdami spindulį apie jo pradžios tašką, vadinamas ***pósūkio kampù***.

Posūkio kampas, kurį gauname sukdami spindulį:

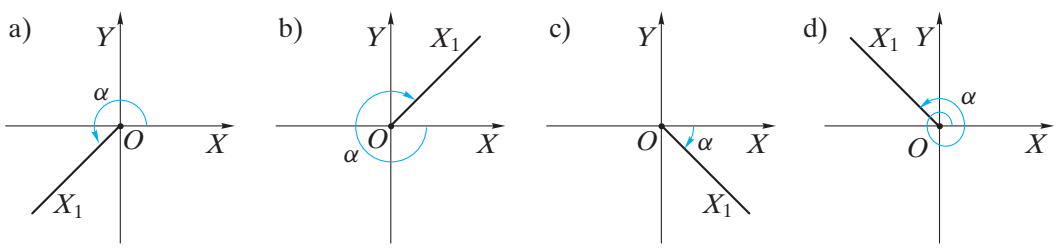
- *prieš* laikrodžio rodyklę, laikomas *teigiamúoju kampù*;
- *pagal* laikrodžio rodyklę, laikomas *neigiamúoju kampù*.

Posūkių kampų dydžiai, kaip ir plokštumos kampų dydžiai, nurodomi laipsniais (teigiamųjų posūkių kampų dydžiai nurodomi teigiamaisiais, o neigiamųjų — neigiamaisiais skaičiais).

Posūkių kampai dažnai vaizduojami stačiakampėje koordinačių plokštumoje OXY, sukant spindulį OX.

Užduotis.

1) Kuriam koordinačių plokštumos ketvirčiui priklauso posūkio kampas $XOX_1 = \alpha$?



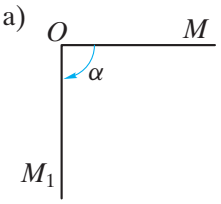
Jei posūkio kampo XOX_1 spindulys OX_1 yra stačiakampės koordinačių plokštumos OXY:

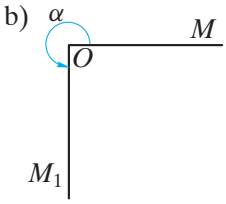
- I (II, III, IV) ketvirtyje, tai tas kampas laikomas pirmojo (antrojo, trečiojo, ketvirtojo) ketvirčio kampu (jei α yra I ketvirčio kampas, tai rašysime $\alpha \in$ I ketvirčiui);
- arba ašyje OX, arba ašyje OY, tai tas kampas nepriskiriamas nė vienam ketvirčiui.

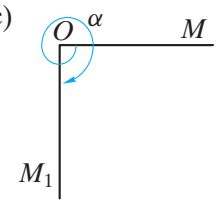
2) Nubraižykite stačiakampę koordinačių plokštumą OXY. Pavaizduokite posūkio kampą XOX_1, kuris gaunamas sukant spindulį OX:
a) pagal laikrodžio rodyklę 90°; b) prieš laikrodžio rodyklę 180°;
c) pagal laikrodžio rodyklę 270°; d) prieš laikrodžio rodyklę 450°.
Kiekvienu atveju užrašykite, koks yra posūkio kampo dydis.

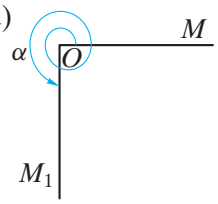
2.1. Uždaviniai

162. Plokštumos kampo MOM_1 dydis yra 90°. Koks yra pavaizduoto posūkio kampo α dydis?

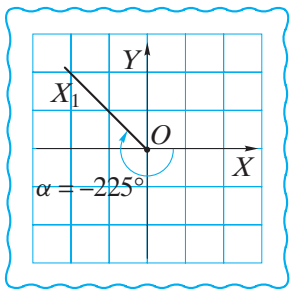
a) 

b) 

c) 

d) 

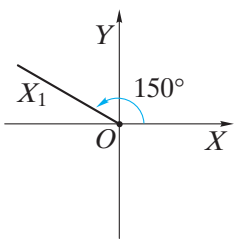
163. Koordinačių plokštumoje OXY pavaizduokite posūkio kampą $XOX_1 = \alpha$, kai:
a) $\alpha = 45°$; b) $\alpha = -30°$; c) $\alpha = 150°$; d) $\alpha = -210°$;
e) $\alpha = 90°$; f) $\alpha = -180°$; g) $\alpha = 360°$; h) $\alpha = -270°$.



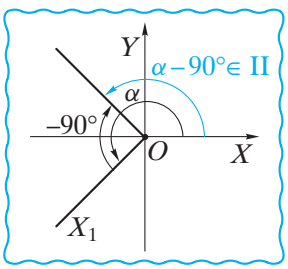
164. Kuriam koordinačių plokštumos OXY ketvirčiui priklauso posūkio kampas XOX_1, jei jo dydis yra:
a) 110°? b) −110°? c) 290°? d) −290°? e) 380°? f) −380°? g) 700°? h) −700°?

Posūkio kampas, kurio dydis yra 400°, priklauso koordinačių plokštumos OXY pirmam ketvirčiui, nes $400° = 360° + 40°$, o $40° \in$ I ketvirčiui.

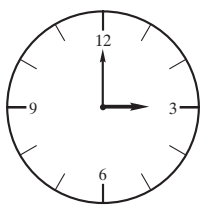
165. Koordinačių plokštumoje OXY pažymėtas posūkio kampas $XOX_1 = 150°$. Kuriame ketvirtyje (ar ašyje) atsidurs spindulys OX_1, jei jį dar pasuksime kampu, lygiu:
a) 50°? b) 130°? c) −50°? d) −130°?
e) 220°? f) 470°? g) −220°? h) −470°?
i) 210°? j) 480°? k) −330°? l) −780°?



166. Posūkio kampas $XOX_1 = \alpha$ yra koordinačių plokštumos OXY III ketvirtyje. Kuriam ketvirčiui priklauso kampas:
a) $\alpha + 90°$? b) $\alpha - 90°$? c) $\alpha + 180°$? d) $\alpha - 180°$?
e) $\alpha + 270°$? f) $\alpha - 270°$? g) $\alpha + 360°$? h) $\alpha - 360°$?
i) $\alpha + 450°$? j) $\alpha - 450°$? k) $\alpha + 810°$? l) $\alpha - 810°$?



167. Pavaizduotas mechaninis laikrodis rodo 3 valandas.
Šio laikrodžio minutinę rodyklę pasukome:
a) 30 minučių pirmyn; b) 20 minučių atgal;
c) 45 minutes pirmyn; d) 60 minučių atgal.
Koks yra laikrodžio minutinės rodyklės posūkio kampo dydis laipsniais?



168. Jonas pasuko ant sienos pakabinto dviračio ratą prieš laikrodžio rodyklę. Per 5 sekundes ratas apsisuko 20 kartų. Kokio dydžio kampu pasisuko ratas per:
a) 1 sekundę? b) 10 sekundžių? c) 1 minutę?

Apsisukdamas 1 kartą ratas pasisuka 360° kampu.

169. Veržliarakčiu sukame veržlę. Raktą apsukome 2,5 karto prieš laikrodžio rodyklę. Kokiu kampu pasisuko veržlė?



2.2. Posūkio kampo sinusas

Praeitais metais susipažinome su smailiųjų kampų α ($0° < \alpha < 90°$) sinusais, kosinusais ir tangentais. Šiame atverstinyje sužinosime, ką vadiname *posūkio kampo sinusu*.



1 užduotis.

1) Nubraižykite stačiakampę koordinačių plokštumą OXY. Abscisių ašyje OX pažymėkite tašką $A(1; 0)$ (koordinačių ašių vienetines atkarpas imkite lygias 4 langelių ilgiui). Nubrėžkite apskritimą, kuriuo juda taškas A, sukant spindulį OA apie tašką O.

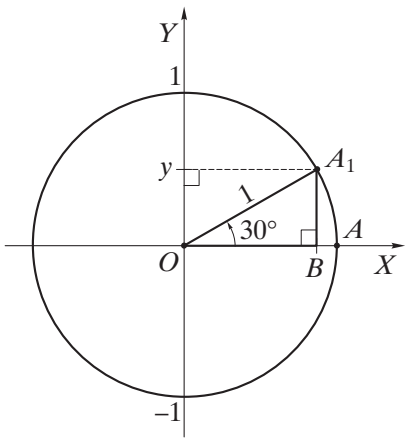
Taškas A juda apskritimu, kurio centras yra koordinačių pradžios taškas $O(0; 0)$, o spindulys lygus 1. Toks apskritimas vadinamas *vienetiniù apskritimù*.

2) Pavaizduokite posūkio kampą AOA_1, lygų 45°. (Pasukus spindulį OA, taškas A perėjo į tašką A_1.)

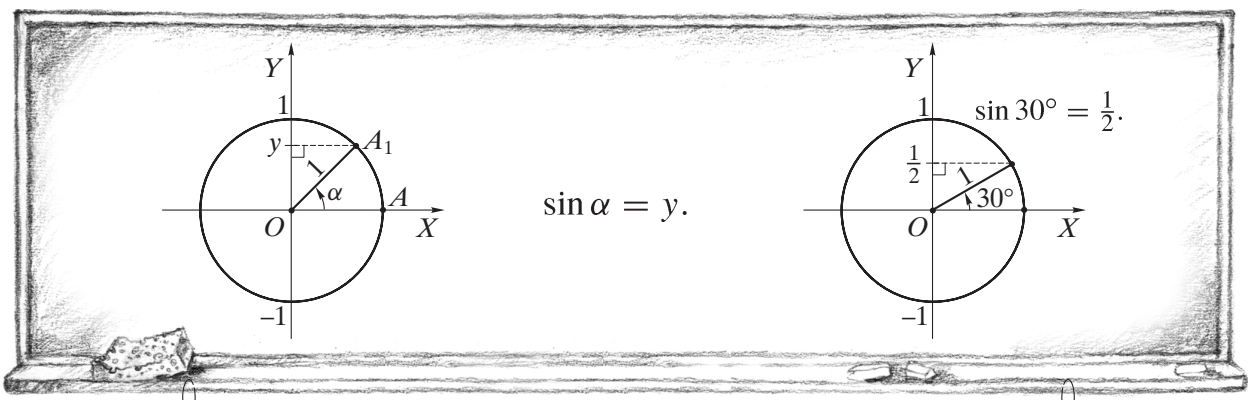
3) Apskaičiuokite taško A_1 kordinatę y (ordinatę) ir gautąją y reikšmę pažymėkite OY ašyje.

Apskaičiuokime posūkio kampo $AOA_1 = 30°$ taško A_1 koordinatę y.

1) Nubrėžkime atkarpą A_1B, statmeną OX ašiai. Trikampis OBA_1 yra status.
2) Statinis A_1B yra prieš 30° kampą, todėl $A_1B = \frac{OA_1}{2} = \frac{1}{2}$.
3) Taško A_1 koordinatė y yra lygi statinio A_1B ilgiui, todėl $y = \frac{1}{2}$.



4) Panagrinėkite lentoje pateiktą posūkio kampo sinuso apibrėžimą ir užrašykite, kam lygu $\sin 45°$.



Pósūkio kam̃po $AOA_1 = \alpha$ ***sìnusu*** vadiname taško A_1 koordinatę y (ordinatę).

5) Įsitikinkite, kad $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

6) Kam lygu $\sin\alpha$, kai: $\alpha = 0°$? $\alpha = 90°$? $\alpha = 180°$? $\alpha = 270°$?

2 užduotis.

1) Ar su visomis posūkio kampo α reikšmėmis $\sin\alpha$ turi prasmę?

2) Ar $\sin\alpha$ reikšmė gali būti didesnė už 1? mažesnė už -1? Kokio skaičių intervalo reikšmes gali įgyti $\sin\alpha$?

170. 1) Remdamiesi posūkio kampo α sinuso apibrėžimu, apskaičiuokite:

a) $\sin 0° = \ldots$,
$\sin 360° = \ldots$,
$\sin(-360°) = \ldots$;

b) $\sin 60° = \ldots$,
$\sin(60° + 360°) = \ldots$,
$\sin\big(60° + 360° \cdot (-2)\big) = \ldots$;

c) $\sin 180° = \ldots$,
$\sin(180° + 360°) = \ldots$,
$\sin\big(180° + 360° \cdot (-3)\big) = \ldots$.

Posūkių kampų $\alpha + 360° \cdot k$, $k \in \mathbf{Z}$, sinusų reikšmės yra lygios posūkio kampo α sinuso reikšmei, t. y. $\sin(\alpha + 360° \cdot k) = \sin\alpha$, $k \in \mathbf{Z}$.

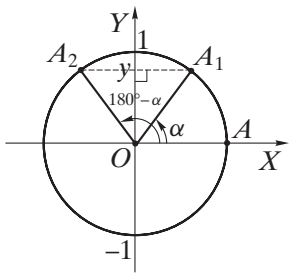
2) Remdamiesi lygybe $\sin(\alpha + 360° \cdot k) = \sin\alpha$, $k \in \mathbf{Z}$, apskaičiuokite:

a) $\sin 405°$; b) $\sin 750°$; c) $\sin 780°$; d) $\sin(-315°)$; e) $\sin(-330°)$; f) $\sin(-660°)$.

$\sin 765° = \sin(765° - 360°) = \sin 405° = \sin(405° - 360°) = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\sin 765° = \sin(765° - 2 \cdot 360°) = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

171. Pavaizduoti posūkio kampai α ir $(180° - \alpha)$. Kampams α ir $(180° - \alpha)$ yra teisinga lygybė $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$.

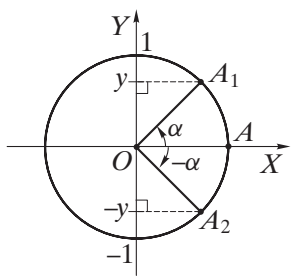


1) Remdamiesi šia lygybe, apskaičiuokite:
a) $\sin 150°$; b) $\sin 135°$; c) $\sin 120°$.

2) Remdamiesi lygybėmis $\sin(\alpha + 360° \cdot k) = \sin\alpha$, $k \in \mathbf{Z}$, ir $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, apskaičiuokite:
a) $\sin 510°$; b) $\sin(-210°)$; c) $\sin 840°$;
d) $\sin(-240°)$; e) $\sin 495°$; f) $\sin(-585°)$.

$\sin 480° = \sin(480° - 360°) = \sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

172. Pavaizduoti posūkio kampai α ir $-\alpha$. Kampams α ir $-\alpha$ yra teisinga lygybė $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.



1) Remdamiesi šia lygybe, apskaičiuokite:
a) $\sin(-30°)$; b) $\sin(-45°)$; c) $\sin(-60°)$.

2) Remdamiesi lygybėmis $\sin(\alpha + 360° \cdot k) = \sin\alpha$, $k \in \mathbf{Z}$, ir $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, apskaičiuokite:
a) $\sin 330°$; b) $\sin(-390°)$; c) $\sin 315°$;
d) $\sin(-405°)$; e) $\sin 660°$; f) $\sin(-780°)$.

$\sin 300° = \sin(300° - 360°) = \sin(-60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

173. Kokios yra posūkio kampo α sinuso reikšmės (teigiamos ar neigiamos), kai α yra:
a) I ketvirtyje? b) II ketvirtyje? c) III ketvirtyje? d) IV ketvirtyje?

174. Nurodykite posūkio kampus x, priklausančius intervalui $[0°; 360°]$, su kuriais teisinga lygybė:

a) $\sin x = \frac{1}{2}$; b) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $\sin x = 0$; e) $\sin x = 1$; f) $\sin x = -1$.

Lygybių
$\sin(\alpha + 360° \cdot k) = \sin\alpha$, $k \in \mathbf{Z}$, $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
įrodymai yra pateikti atverstinyje „Besidomintiems“, p. 66, 67.

2.3. Posūkio kampo kosinusas

Praeitame atverstinyje susipažinote su posūkio kampo sinusu. Jį apibrėždami naudojomės vienetinio apskritimo taško koordinate y.
Šiame atverstinyje sužinosime, ką vadiname *posūkio kampo kosinusu*. Jį apibrėždami naudosimės vienetinio apskritimo taško koordinate x.

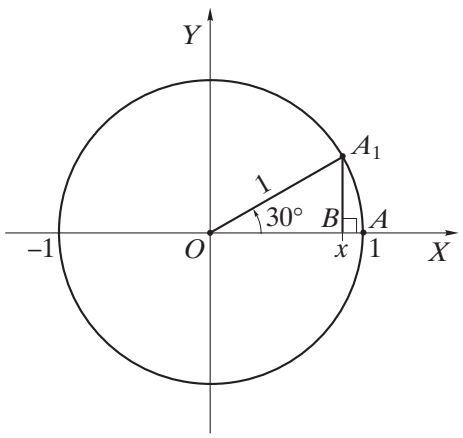


1 užduotis.

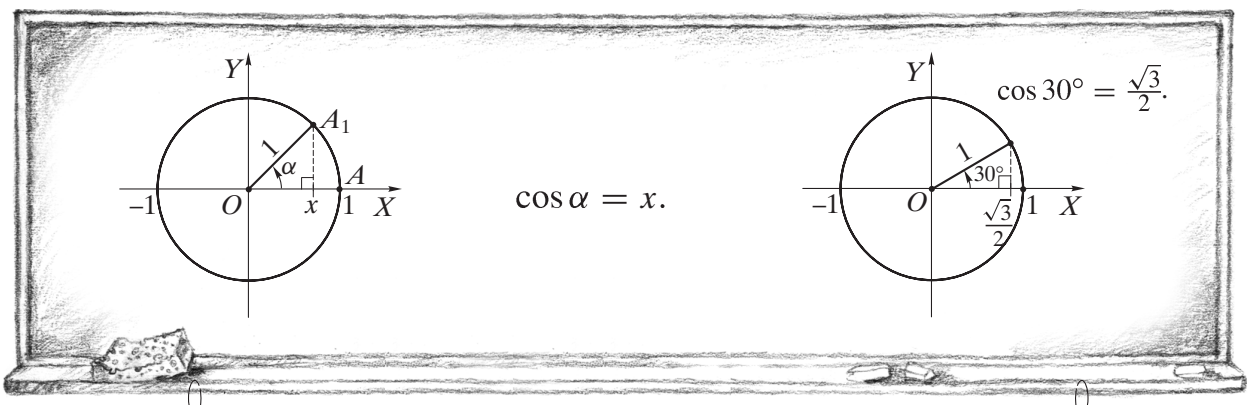
1) Praeitame atverstinyje, atlikdami 1 užduotį, pavaizdavote posūkio kampą $AOA_1 = 45°$ ir apskaičiavote taško A_1 koordinatę y (ordinatę). Dabar, naudodamiesi tuo pačiu brėžiniu, apskaičiuokite taško A_1 koordinatę x (abscisę).

Apskaičiuokime posūkio kampo $AOA_1 = 30°$ taško A_1 koordinatę x.

1) Nubrėžkime atkarpą A_1B, statmeną OX ašiai. Trikampis OBA_1 yra status.
2) Kadangi $OA_1 = 1$, $A_1B = \frac{1}{2}$, tai, remdamiesi Pitagoro teorema, apskaičiuojame OB ilgį:
$(OB)^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$,
$(OB)^2 = 1 - \frac{1}{4}$,
$(OB)^2 = \frac{3}{4}$,
$OB = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
3) Taško A_1 koordinatė x yra lygi statinio OB ilgiui, todėl $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



2) Panagrinėkite lentoje pateiktą posūkio kampo kosinuso apibrėžimą ir užrašykite, kam lygu $\cos 45°$.



Pósūkio kam̃po $AOA_1 = \alpha$ ***kòsinusu*** vadiname taško A_1 koordinatę x (abscisę).

3) Įsitikinkite, kad $\cos 60° = \frac{1}{2}$.

4) Kam lygu $\cos\alpha$, kai: $\alpha = 0°$? $\alpha = 90°$? $\alpha = 180°$? $\alpha = 270°$?

2 užduotis.

1) Ar su visomis posūkio kampo α reikšmėmis $\cos\alpha$ turi prasmę?
2) Ar $\cos\alpha$ reikšmė gali būti didesnė už 1? mažesnė už -1? Kokio skaičių intervalo reikšmes gali įgyti $\cos\alpha$?

175. 1) Remdamiesi posūkio kampo α kosinuso apibrėžimu, apskaičiuokite:

a) $\cos 0° = ...$, $\cos 360° = ...$, $\cos(-360°) = ...$;

b) $\cos 60° = ...$, $\cos(60° + 360°) = ...$, $\cos\big(60° + 360° \cdot (-2)\big) = ...$;

c) $\cos 180° = ...$, $\cos(180° + 360°) = ...$, $\cos\big(180° + 360° \cdot (-3)\big) = ...$.

Posūkių kampų $\alpha + 360° \cdot k$, $k \in \mathbf{Z}$, kosinusų reikšmės yra lygios posūkio kampo α kosinuso reikšmei, t. y. $\cos(\alpha + 360° \cdot k) = \cos\alpha$, $k \in \mathbf{Z}$.

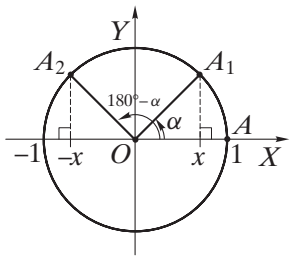
2) Remdamiesi lygybe $\cos(\alpha + 360° \cdot k) = \cos\alpha$, $k \in \mathbf{Z}$, apskaičiuokite:

a) $\cos 405°$; b) $\cos 750°$; c) $\cos 780°$; d) $\cos(-315°)$; e) $\cos(-330°)$; f) $\cos(-660°)$.

$\cos 765° = \cos(765° - 360°) = \cos 405° = \cos(405° - 360°) = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\cos 765° = \cos(765° - 2 \cdot 360°) = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

176. Pavaizduoti posūkio kampai α ir $(180° - \alpha)$. Kampams α ir $(180° - \alpha)$ yra teisinga lygybė $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$.

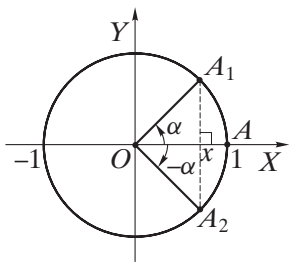


1) Remdamiesi šia lygybe, apskaičiuokite:
a) $\cos 150°$; b) $\cos 135°$; c) $\cos 120°$.

2) Remdamiesi lygybėmis $\cos(\alpha + 360° \cdot k) = \cos\alpha$, $k \in \mathbf{Z}$, ir $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, apskaičiuokite:
a) $\cos 510°$; b) $\cos(-210°)$; c) $\cos 840°$;
d) $\cos(-240°)$; e) $\cos 495°$; f) $\cos(-585°)$.

$\cos 480° = \cos(480° - 360°) = \cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$.

177. Pavaizduoti posūkio kampai α ir $-\alpha$. Kampams α ir $-\alpha$ yra teisinga lygybė $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.



1) Remdamiesi šia lygybe, apskaičiuokite:
a) $\cos(-30°)$; b) $\cos(-45°)$; c) $\cos(-60°)$.

2) Remdamiesi lygybėmis $\cos(\alpha + 360° \cdot k) = \cos\alpha$, $k \in \mathbf{Z}$, ir $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, apskaičiuokite:
a) $\cos 330°$; b) $\cos(-390°)$; c) $\cos 315°$;
d) $\cos(-405°)$; e) $\cos 660°$; f) $\cos(-780°)$.

$\cos 300° = \cos(300° - 360°) = \cos(-60°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$.

178. Kokios yra posūkio kampo α kosinuso reikšmės (teigiamos ar neigiamos), kai α yra:
a) I ketvirtyje? b) II ketvirtyje? c) III ketvirtyje? d) IV ketvirtyje?

179. Nurodykite posūkio kampus x, priklausančius intervalui $[0°; 360°]$, su kuriais teisinga lygybė:

a) $\cos x = \frac{1}{2}$; b) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $\cos x = 0$; e) $\cos x = 1$; f) $\cos x = -1$.

Lygybių
$\cos(\alpha + 360° \cdot k) = \cos\alpha$, $k \in \mathbf{Z}$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
įrodymai yra pateikti atverstinyje „Besidomintiems“, p. 66, 67.

2.4. Posūkio kampo tangentas

Jau susipažinote su posūkio kampo sinusu ir kosinusu.
Šiame atverstinyje sužinosite, ką vadiname *posūkio kampo tangentu*. Jį apibrėždami remsimės to kampo sinusu ir kosinusu.

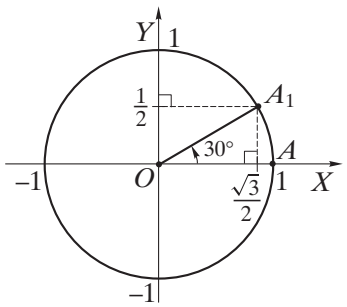


1 užduotis.

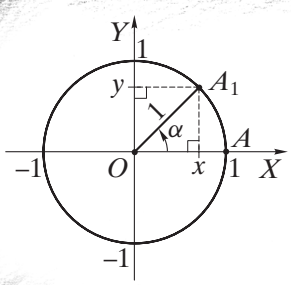
1) Apibrėždami posūkio kampo sinusą ir kosinusą, naudojomės kampo $AOA_1 = \alpha$ taško A_1 koordinatėmis y ir x. Prisiminkite ir užrašykite, kam lygios posūkio kampo $AOA_1 = 45°$ taško A_1 koordinatės y ir x.

2) Apskaičiuokite santykį $\frac{y}{x}$.

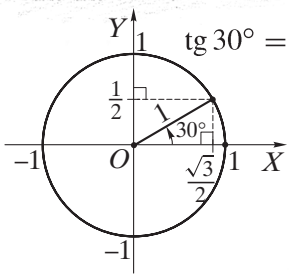
Kai $\angle AOA_1 = 30°$, tai A_1 koordinatės:
$y = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Šių koordinačių santykis:
$\frac{y}{x} = y : x = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
Beje, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, nes $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



3) Panagrinėkite lentoje pateiktą posūkio kampo tangento apibrėžimą ir užrašykite, kam lygu $\operatorname{tg} 45°$.



$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$.



$\operatorname{tg} 30° = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Pósūkio kam̃po $AOA_1 = \alpha$ ***tángentu*** vadiname taško A_1 koordinatės y (ordinatės) ir koordinatės x (abscisės) santykį.

4) Įsitikinkite, kad $\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$.

2 užduotis. Žinome, kad posūkio kampo $AOA_1 = \alpha$ taško A_1 koordinatė y vadinama to kampo sinusu, o koordinatė x — kosinusu. Vadinasi,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

1) Remdamiesi šia lygybe, užrašykite visas α reikšmes, su kuriomis $\operatorname{tg}\alpha$ neturi prasmės.

Trupmena neturi prasmės, kai vardiklis lygus nuliui.
Vadinasi, $\operatorname{tg}\alpha$ neturi prasmės, kai $\cos\alpha = 0$.

2) Su kuriomis α reikšmėmis $\operatorname{tg}\alpha = 0$?

180. 1) Remdamiesi tangento apibrėžimu, apskaičiuokite:

a) $\operatorname{tg} 0° = \ldots$,
$\operatorname{tg} 360° = \ldots$,
$\operatorname{tg}(-360°) = \ldots$;

b) $\operatorname{tg} 45° = \ldots$,
$\operatorname{tg}(45° + 360°) = \ldots$,
$\operatorname{tg}\big(45° + 360° \cdot (-2)\big) = \ldots$;

c) $\operatorname{tg} 60° = \ldots$,
$\operatorname{tg}(60° + 360°) = \ldots$,
$\operatorname{tg}\big(60° + 360° \cdot (-3)\big) = \ldots$.

Posūkių kampų $\alpha + 360° \cdot k$, $k \in \mathbf{Z}$, tangentų reikšmės yra lygios posūkio kampo α tangento reikšmei, t. y. $\operatorname{tg}(\alpha + 360° \cdot k) = \operatorname{tg}\alpha$, $k \in \mathbf{Z}$.

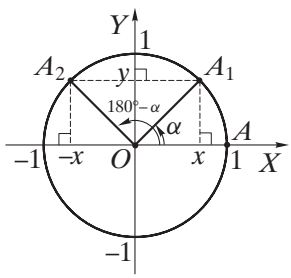
2) Remdamiesi lygybe $\operatorname{tg}(\alpha + 360° \cdot k) = \operatorname{tg}\alpha$, $k \in \mathbf{Z}$, apskaičiuokite.

a) $\operatorname{tg} 405°$; b) $\operatorname{tg} 750°$; c) $\operatorname{tg} 780°$; d) $\operatorname{tg}(-315°)$; e) $\operatorname{tg}(-330°)$; f) $\operatorname{tg}(-660°)$.

$\operatorname{tg} 765° = \operatorname{tg}(765° - 360°) = \operatorname{tg} 405° = \operatorname{tg}(405° - 360°) = \operatorname{tg} 45° = 1.$

$\operatorname{tg} 765° = \operatorname{tg}(765° - 2 \cdot 360°) = \operatorname{tg} 45° = 1.$

181. Pavaizduoti posūkio kampai α ir $(180° - \alpha)$.



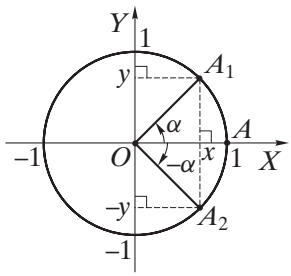
1) Prisiminkite ir užrašykite, kam lygu:
$\sin(180° - \alpha)$; $\cos(180° - \alpha)$.

2) Pabaikite lygybę
$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = \frac{\sin(180° - \alpha)}{\cos(180° - \alpha)} = \ldots$.

3) Apskaičiuokite.
a) $\operatorname{tg} 510°$; b) $\operatorname{tg}(-210°)$; c) $\operatorname{tg} 840°$;
d) $\operatorname{tg}(-240°)$; e) $\operatorname{tg} 495°$; f) $\operatorname{tg}(-585°)$.

$\operatorname{tg} 480° = \operatorname{tg}(480° - 360°) = \operatorname{tg} 120° = \operatorname{tg}(180° - 60°) = -\operatorname{tg} 60° = -\sqrt{3}.$

182. Pavaizduoti posūkio kampai α ir $-\alpha$.



1) Prisiminkite ir užrašykite, kam lygu:
$\sin(-\alpha)$; $\cos(-\alpha)$.

2) Pabaikite lygybę
$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \ldots$.

3) Apskaičiuokite.
a) $\operatorname{tg} 330°$; b) $\operatorname{tg}(-390°)$; c) $\operatorname{tg} 315°$;
d) $\operatorname{tg}(-405°)$; e) $\operatorname{tg} 660°$; f) $\operatorname{tg}(-780°)$.

$\operatorname{tg} 300° = \operatorname{tg}(300° - 360°) = \operatorname{tg}(-60°) = -\operatorname{tg} 60° = -\sqrt{3}.$

183. Pabaikite lygybes:

a) $\operatorname{tg} 0° = \ldots$,
$\operatorname{tg} 180° = \ldots$,
$\operatorname{tg}(-180°) = \ldots$;

b) $\operatorname{tg} 30° = \ldots$,
$\operatorname{tg} 210° = \ldots$,
$\operatorname{tg}(-150°) = \ldots$;

c) $\operatorname{tg} 45° = \ldots$,
$\operatorname{tg} 225° = \ldots$,
$\operatorname{tg}(-135°) = \ldots$;

d) $\operatorname{tg} 60° = \ldots$,
$\operatorname{tg} 240° = \ldots$,
$\operatorname{tg}(-120°) = \ldots$.

Posūkių kampų $\alpha + 180° \cdot k$, $k \in \mathbf{Z}$, tangentų reikšmės yra lygios posūkio kampo α tangento reikšmei, t. y. $\operatorname{tg}(\alpha + 180° \cdot k) = \operatorname{tg}\alpha$, $k \in \mathbf{Z}$.
Šios lygybės įrodymas pateiktas atverstinyje „Besidomintiems“, p. 66, 67.

184. Kokios yra posūkio kampo α tangento reikšmės (teigiamos ar neigiamos), kai α yra:
a) I ketvirtyje? b) II ketvirtyje? c) III ketvirtyje? d) IV ketvirtyje?

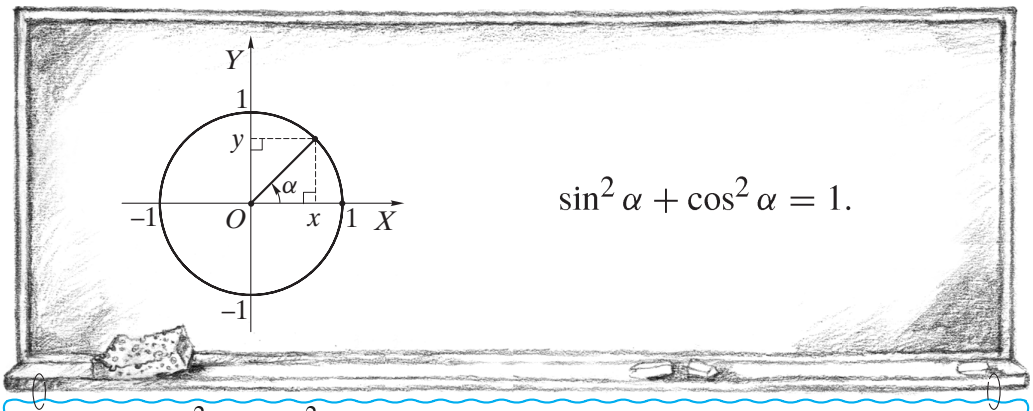
2.5. Pagrindinė trigonometrinė tapatybė

Žinome, kad to paties posūkio kampo α sinusą, kosinusą ir tangentą sieja lygybė
$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$ $(\cos\alpha \neq 0,$ t. y. kai $\alpha \neq 90° + 180° \cdot k, k \in \mathbf{Z})$.
Šiame atverstinyje susipažinsite su lygybe, kuri vadinama *pagrindine trigonometrine tapatybe*.



Užduotis.

1) Panagrinėkite lentoje užrašytą lygybę, siejančią to paties posūkio kampo α sinusą ir kosinusą.

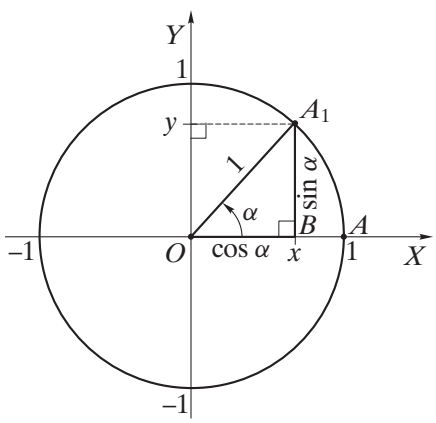


Lygybė $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ vadinama ***pagrindinė trigonomètrine tapatýbe***.

2) Įsitikinkite, kad pagrindinė trigonometrinė tapatybė yra teisinga, kai posūkio kampas α lygus:
a) 30°; b) 45°; c) 60°; d) 120°; e) 150°; f) −30°; g) −45°.

Įsitikinkime, kad $\sin^2(-60°) + \cos^2(-60°) = 1$. Iš tikrųjų:
$\sin(-60°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(-60°) = \frac{1}{2}$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$.

3) Įsitikinkite, kad lygybė $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ yra teisinga, kai posūkio kampas $\alpha \in$ I ketvirčiui (žr. pav.).



- Nagrinėkite statųjį trikampį OBA_1, kurio smailusis kampas yra α (taškas B žymi taško A_1 koordinatę x):
  $\angle B = 90°$, $\angle O = \alpha$, $OA_1 = 1$;
  $OB = x = \cos\alpha$ (paaiškinkite kodėl),
  $A_1B = y = \sin\alpha$ (paaiškinkite kodėl).
- Pagal Pitagoro teoremą:
  $(A_1B)^2 + (OB)^2 = (OA_1)^2$,
  $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1^2$,
  $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Pastaba. Panašiai galima įsitikinti, kad pagrindinė trigonometrinė tapatybė yra teisinga ir tada, kai $\alpha \in$ II, III arba IV ketvirčiui.

4) Įsitikinkite, kad lygybė $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ yra teisinga, kai $\alpha = 90° \cdot k$, $k \in \mathbf{Z}$ ($\alpha = 0°, \pm 90°, \pm 180°, \pm 270°, \pm 360°, \ldots$).

185. Ar yra toks posūkio kampas α, kad:

a) $\sin\alpha = \frac{3}{4}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$?

b) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$?

c) $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, $\sin\alpha = -\frac{2}{3}$?

d) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$?

Nustatykime, ar yra toks posūkio kampas α, kad $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\alpha = \frac{3}{4}$.

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{16} = \frac{4+9}{16} = \frac{13}{16}$.

Kadangi $\frac{13}{16} \neq 1$, tai tokio kampo α nėra.

186. 1) Nustatykite, kokia yra $\sin\alpha$ reikšmė (teigiama ar neigiama), kai:

a) $\alpha = 42°$; b) $\alpha = -222°$; c) $\alpha = 195°$; d) $\alpha = -57°$.

2) Nustatykite, kokia yra $\cos\alpha$ reikšmė (teigiama ar neigiama), kai:

a) $\alpha = 67°$; b) $\alpha = -194°$; c) $\alpha = 207°$; d) $\alpha = -81°$.

3) Prisiminkite, kuriems ketvirčiams priklauso posūkio kampas α, jei:

a) $\sin\alpha > 0$; b) $\sin\alpha < 0$; c) $\cos\alpha > 0$; d) $\cos\alpha < 0$.

187. Apskaičiuokite:

a) $\sin\alpha$, kai $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ ir $\alpha \in$ I ketvirčiui;

b) $\cos\alpha$, kai $\sin\alpha = \frac{8}{17}$ ir $\alpha \in$ II ketvirčiui;

c) $\sin\alpha$, kai $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$ ir $\alpha \in$ III ketvirčiui;

d) $\cos\alpha$, kai $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$ ir $\alpha \in$ IV ketvirčiui.

Apskaičiuokime $\sin\alpha$, kai $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ ir $\alpha \in$ IV ketvirčiui.

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\sin^2\alpha + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$, $\sin^2\alpha = 1 - \frac{16}{25}$, $\sin^2\alpha = \frac{9}{25}$.

Kadangi $\alpha \in$ IV ketvirčiui, o šiame ketvirtyje $\sin\alpha < 0$, tai

$\sin\alpha = -\sqrt{\frac{9}{25}}$, $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$.

188. Apskaičiuokite:

a) $\sin\alpha$ ir $\operatorname{tg}\alpha$, kai $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ir $\alpha \in$ I ketvirčiui;

b) $\cos\alpha$ ir $\operatorname{tg}\alpha$, kai $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ir $\alpha \in$ II ketvirčiui;

c) $\sin\alpha$ ir $\operatorname{tg}\alpha$, kai $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ ir $\alpha \in$ III ketvirčiui;

d) $\cos\alpha$ ir $\operatorname{tg}\alpha$, kai $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$ ir $\alpha \in$ IV ketvirčiui.

Apskaičiuokime $\cos\alpha$ ir $\operatorname{tg}\alpha$, kai $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ir $\alpha \in$ IV ketvirčiui.

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$, $\frac{1}{2} + \cos^2\alpha = 1$, $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}$.

Kadangi $\alpha \in$ IV ketvirčiui, o šiame ketvirtyje $\cos\alpha > 0$, tai

$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = -1$.

189. Suprastinkite reiškinį.

a) $1 - \sin^2\alpha$; b) $1 - \cos^2\alpha$; c) $\sin^2\alpha - 1$; d) $\cos^2\alpha - 1$; e) $\frac{1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$; f) $\frac{1-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$;

g) $1 + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$; h) $\sin\alpha - \sin\alpha\cos^2\alpha$; i) $\cos\alpha - \cos\alpha\sin^2\alpha$;

j) $2\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha - 1$; k) $\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha$; l) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$; m) $\frac{\cos^2\alpha - 1}{\cos^2\alpha}$.

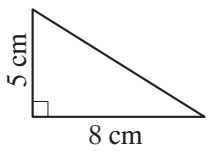
$1 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 1 - \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) = 1 - 1 = 0$.

2.6. Dar viena trikampio ploto formulė

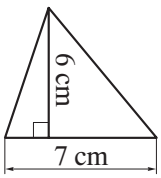
Žemesnėse klasėse mokėmės apskaičiuoti stačiojo trikampio plotą, remdamiesi jo statinių ilgiais. Taip pat skaičiavome bet kokio trikampio plotą, remdamiesi jo kraštinės ir į ją nubrėžtos aukštinės ilgiais.
Šiame atverstinyje mokysimės naudotis dar viena trikampio ploto skaičiavimo formule — remsimės dviejų kraštinių ilgiais ir kampo tarp jų sinusu. (Plokštumos kampų sinusų, kosinusų ir tangentų reikšmės yra lygios atitinkamoms posūkių kampų sinusų, kosinusų ir tangentų reikšmėms.)

1 užduotis. Apskaičiuokite pavaizduoto trikampio plotą.

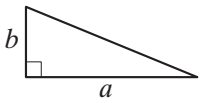
a)



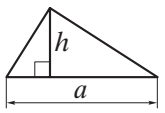
b)



PRISIMINKIME

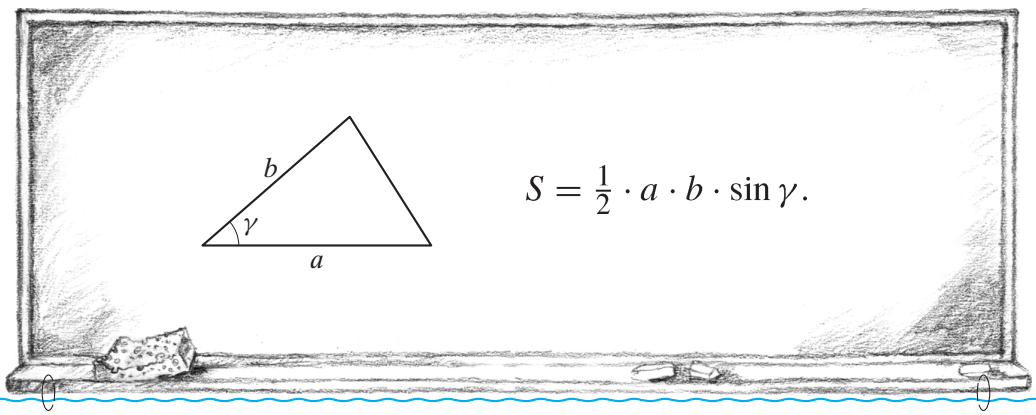


$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b.$



$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h.$

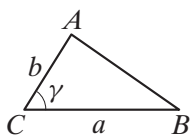
Kai žinome trikampio dviejų kraštinių ilgius ir kampo tarp tų kraštinių dydį, tai trikampio plotą galima apskaičiuoti remiantis lentoje užrašyta formule.



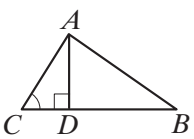
Trikampio plotas lygus dviejų kraštinių ilgių ir kampo tarp tų kraštinių sinuso sandaugos pusei.

2 užduotis.

1) Panagrinėkite lentoje užrašytos formulės įrodymą.
Nubraižykime trikampį ABC ir užrašykime, kas yra žinoma ir ką reikia įrodyti.
Duota: ΔABC.
Įrodyti: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma$.



Įrodymas. Nubrėžkime trikampio ABC aukštinę AD. Tada
$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AD$.
Iš stačiojo trikampio ADC užrašykime, kam lygi aukštinė AD:
$AD = AC \cdot \sin\angle C$.

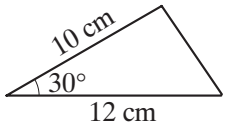


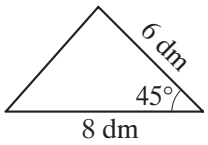
Vadinasi,
$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AC \cdot \sin\angle C$.
Tai ir reikėjo įrodyti.

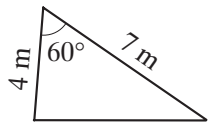
2) Apskaičiuokite trikampio ABC plotą, kai:
a) $AC = 6\,\text{cm}$, $BC = 9\,\text{cm}$, $\angle C = 30°$; b) $AB = 10\,\text{cm}$, $BC = 5\,\text{cm}$, $\angle B = 45°$.

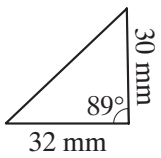
2.6. Uždaviniai

190. Apskaičiuokite pavaizduoto trikampio plotą. Atsakyme nurodykite tikslią reikšmę.

a) 

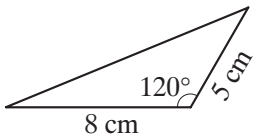
b) 

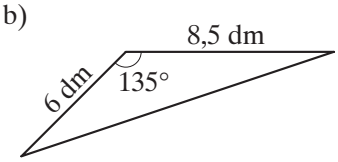
c) 

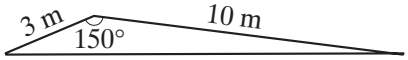
d) 

191. Apskaičiuokite trikampio ABC plotą ($0{,}1\,\text{cm}^2$ tikslumu), kai:
a) $AB = 40\,\text{cm}$, $AC = 32\,\text{cm}$, $\angle A = 70°$;
b) $BC = 21\,\text{cm}$, $AC = 12\,\text{cm}$, $\angle C = 28°$;
c) $BC = 7{,}5\,\text{cm}$, $AB = 4{,}8\,\text{cm}$, $\angle B = 50°$;
d) $AB = 3{,}2\,\text{cm}$, $AC = 3{,}5\,\text{cm}$, $\angle A = 63°$.

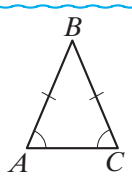
192. Apskaičiuokite pavaizduoto bukojo trikampio plotą. Atsakyme nurodykite tikslią reikšmę.

a) 

b) 

c) 

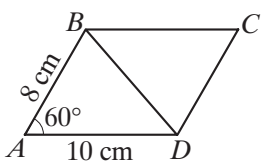
193. Apskaičiuokite lygiašonio trikampio plotą, kai jo:
a) šoninės kraštinės ilgis yra 4 cm, o kampo prieš pagrindą dydis lygus 45°;
b) šoninės kraštinės ilgis yra 10 cm, o kampo prie pagrindo dydis lygus 75°.



ΔABC — lygiašonis,
$AB = BC$,
$\angle A = \angle C$.

194. Apskaičiuokite lygiagretainio, kurio dvi kraštinės yra a ir b, o kampas tarp jų lygus γ, plotą, kai:
a) $a = 20\,\text{cm}$, $b = 17\,\text{cm}$, $\gamma = 30°$;
b) $a = 15\,\text{cm}$, $b = 24\,\text{cm}$, $\gamma = 45°$;
c) $a = 8\,\text{dm}$, $b = 10\,\text{dm}$, $\gamma = 120°$;
d) $a = 16\,\text{dm}$, $b = 12\,\text{dm}$, $\gamma = 150°$.

Apskaičiuokime lygiagretainio $ABCD$ plotą, kai $AB = 8\,\text{cm}$, $AD = 10\,\text{cm}$, $\angle A = 60°$.

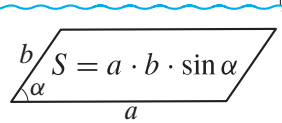


Sprendimas. 1) Nubrėžkime lygiagretainio įstrižainę BD.
2) Kadangi $\Delta ABD = \Delta CDB$ (paaiškinkite kodėl), tai ir jų plotai lygūs, t. y. $S_{\Delta ABD} = S_{\Delta CDB}$.
3) Lygiagretainio plotas S yra lygus trikampių ABD ir CDB plotų sumai, t. y.

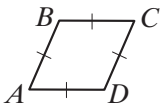
$$S = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta CDB} = 2 \cdot S_{\Delta ABD} = 2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin\angle A =$$
$$= AB \cdot AD \cdot \sin\angle A = 8 \cdot 10 \cdot \sin 60° = 80 \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2} = 40\sqrt{3}\,(\text{cm}^2).$$

Atsakymas. $40\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.

Lygiagretainio plotas lygus gretimų kraštinių ilgių ir kampo tarp tų kraštinių sinuso sandaugai.



195. Rombo perimetras lygus 64 cm, o vieno kampo dydis yra 150°. Apskaičiuokite rombo:
a) kraštinės ilgį; b) plotą.



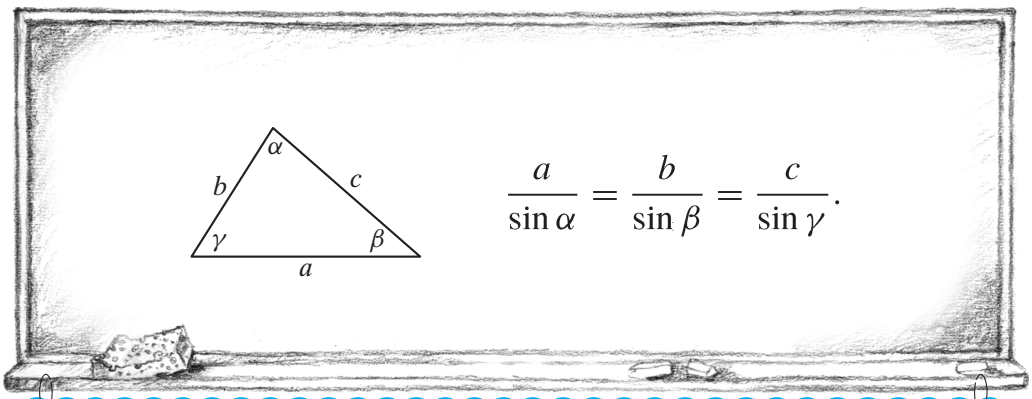
$AB = BC = CD = AD$,
$ABCD$ — rombas.

2.7. Sinusų teorema

Šiame atverstinyje nagrinėsime, kaip siejasi bet kokio trikampio kraštinių ilgiai su prieš jas esančių kampų sinusais.

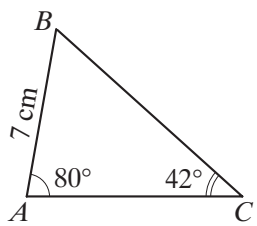
Užduotis.

1) Panagrinėkite lentoje užrašytą sinusų teoremą.



Sinusų teorema. Trikampio kraštinių ilgiai yra proporcingi prieš jas esančių kampų sinusams.

2) Pavaizduotas trikampis ABC, kurio $AB = 7\,\text{cm}$, $\angle A = 80°$, $\angle C = 42°$.



Panagrinėkite, kaip, remiantis sinusų teorema, galima apskaičiuoti kraštinės BC ilgį:

$$\frac{BC}{\sin\angle A} = \frac{AB}{\sin\angle C}, \quad \frac{BC}{\sin 80°} = \frac{7}{\sin 42°}, \quad BC = \frac{7\cdot\sin 80°}{\sin 42°}\,(\text{cm}).$$

Pastaba. Jei sąlygoje nenurodyta, kad reikia apskaičiuoti apytikslę nežinomą dydžio reikšmę, tai atsakymą paliekame tokį, kokį ir gavome. Gautoji BC reikšmė yra iracionalusis skaičius — jis yra tiksli kraštinės ilgio reikšmė.

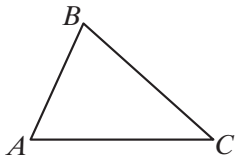
Apytikslę kraštinės BC ilgio reikšmę galima apskaičiuoti skaičiuotuvu:

$$BC = \frac{7\cdot\sin 80°}{\sin 42°} \approx \frac{7\cdot 0{,}985}{0{,}669} \approx 10{,}3\,(\text{cm}).$$

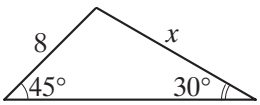
3) Apskaičiuokite kampo B dydį.

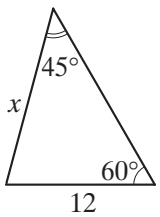
4) Remdamiesi sinusų teorema, apskaičiuokite kraštinės AC ilgį. Atsakyme užrašykite tikslią reikšmę ir apytikslę 0,1 cm tikslumu.

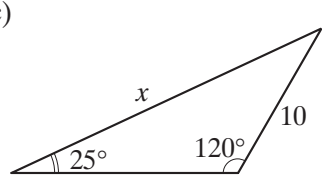
196. Apskaičiuokite trikampio ABC kraštinės:
a) BC ilgį, kai $AB = 4\,\text{cm}$, $\sin\angle A = 0{,}9$, $\sin\angle C = 0{,}8$;
b) AC ilgį, kai $BC = 5\,\text{dm}$, $\sin\angle B = 0{,}4$, $\sin\angle A = 0{,}6$;
c) AB ilgį, kai $AC = 6\,\text{m}$, $\sin\angle B = 0{,}7$, $\sin\angle C = 0{,}9$.

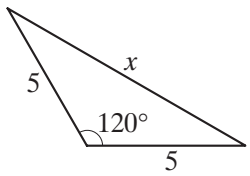


197. Naudodamiesi brėžinio duomenimis, apskaičiuokite trikampio kraštinės x ilgį. Atsakyme nurodykite tikslią reikšmę.

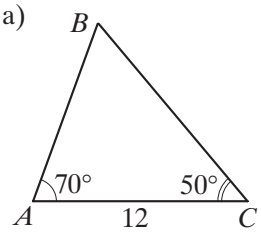
a) 

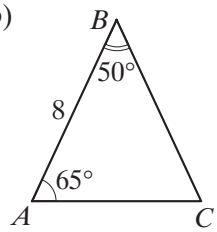
b) 

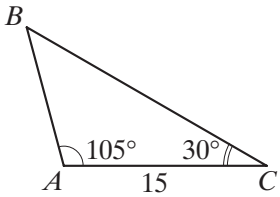
c) 

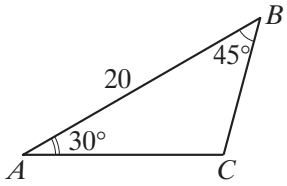
d) 

198. Pirmiausia apskaičiuokite pavaizduoto trikampio nežinomą kampo dydį, o tada — nežinomus kraštinių ilgius dešimtųjų tikslumu.

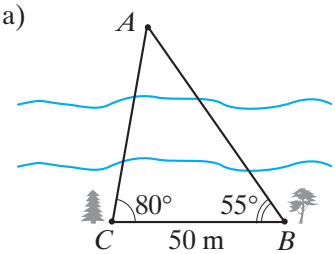
a) 

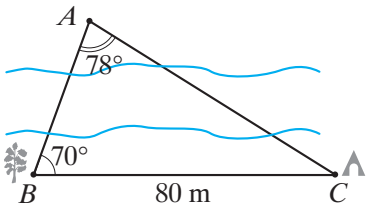
b) 

c) 

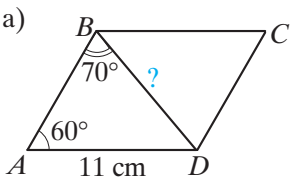
d) 

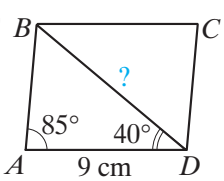
199. Remdamiesi paveikslėliu, apskaičiuokite atstumus AB ir AC vieno metro tikslumu.

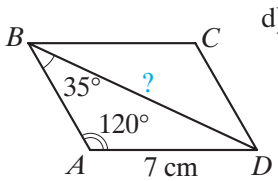
a) 

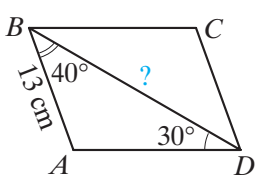
b) 

200. Apskaičiuokite pavaizduoto lygiagretainio įstrižainės BD ilgį 0,1 cm tikslumu.

a) 

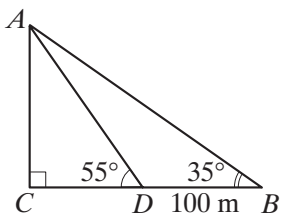
b) 

c) 

d) 

201. Lygiagretainio $ABCD$ įstrižainė BD su kraštinėmis AB ir AD sudaro 70° ir 45° dydžio kampus. Šios įstrižainės ilgis yra 10 cm. Apskaičiuokite lygiagretainio perimetrą 0,01 cm tikslumu.

202. Remdamiesi brėžinio duomenimis, apskaičiuokite:
1) $\angle ADB$; 2) $\angle DAB$; 3) AD (0,1 m tikslumu);
4) AC (0,1 m tikslumu).

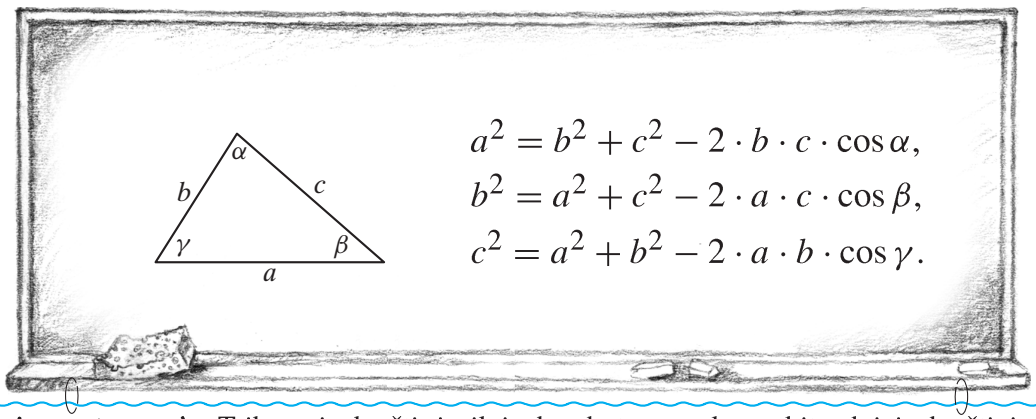


2.8. Kosinusų teorema

Šiame atverstinyje nagrinėsime, kaip siejasi bet kokio trikampio kraštinės ilgis su prieš ją esančio kampo kosinusu.

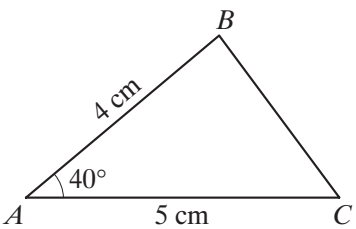
Užduotis.

1) Panagrinėkite lentoje užrašytą kosinusų teoremą.



Kòsinusų teoremà. Trikampio kraštinės ilgio kvadratas yra lygus kitų dviejų kraštinių ilgių kvadratų sumai atėmus dvigubą tų kraštinių ilgių ir kampo tarp tų kraštinių kosinuso sandaugą.

2) Pavaizduotas trikampis ABC, kurio $AB = 4\,\text{cm}$, $AC = 5\,\text{cm}$, $\angle A = 40°$.



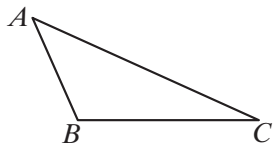
Panagrinėkite, kaip, remiantis kosinusų teorema, galima apskaičiuoti kraštinės BC ilgį:

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\angle A = \\ &= 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos 40° = \\ &= 16 + 25 - 40 \cdot \cos 40° = \\ &= 41 - 40 \cdot \cos 40°, \\ BC &= \sqrt{41 - 40 \cdot \cos 40°}\ (\text{cm}). \end{aligned}$$

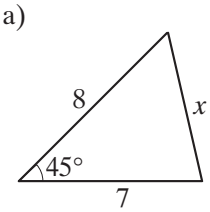
Pastaba. Gautoji BC reikšmė $\sqrt{41 - 40 \cdot \cos 40°}$ yra iracionalusis skaičius — jis yra tiksli kraštinės ilgio reikšmė. Apytikslę kraštinės BC ilgio reikšmę galima apskaičiuoti skaičiuotuvu.

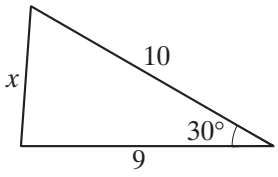
3) Apskaičiuokite kraštinės BC ilgį $0{,}1\,\text{cm}$ tikslumu.

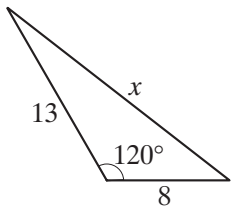
203. Užrašykite kosinusų teoremą trikampio ABC kraštinės:
a) AB ilgiui apskaičiuoti;
b) BC ilgiui apskaičiuoti;
c) AC ilgiui apskaičiuoti.

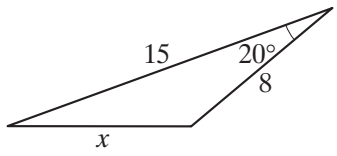


204. Naudodamiesi kosinusų teorema, apskaičiuokite pavaizduoto trikampio kraštinės x ilgį 0,1 tikslumu.

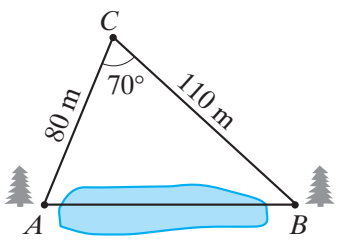
a)


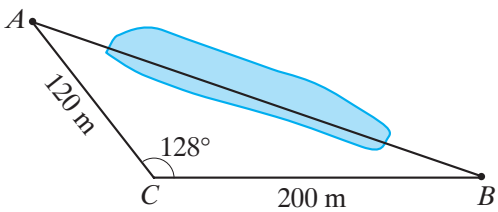
b)


c)


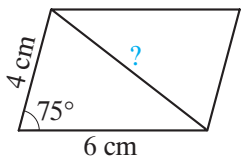
d)


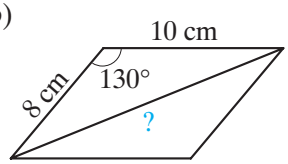
205. Remdamiesi paveikslėliu, apskaičiuokite atstumą AB vieno metro tikslumu.

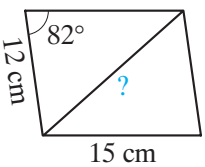
a)


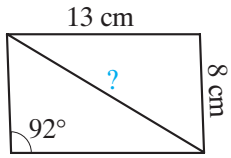
b)


206. Apskaičiuokite lygiagretainio klaustuku pažymėtos įstrižainės ilgį 0,1 cm tikslumu.

a)


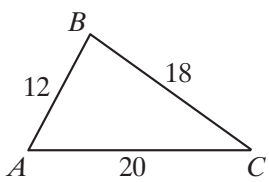
b)


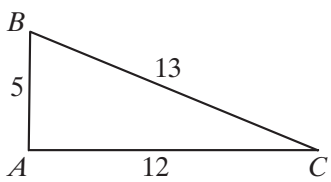
c)


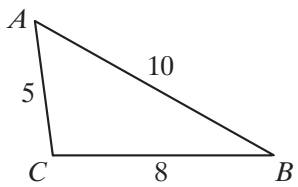
d)


207. Lygiagretainio $ABCD$ kraštinės AD ilgis yra 10 cm. Įstrižainė AC su šia kraštine sudaro 45° kampą. Apskaičiuokite lygiagretainio perimetrą 0,01 cm tikslumu, jei $AC = 15$ cm.

208. Naudodamiesi brėžinio duomenimis, apskaičiuokite trikampio ABC kampų dydžius 1° tikslumu.

a)


b)


c)


Naudodamiesi kosinusų teorema, apskaičiuokime pavaizduoto trikampio ABC kampo A dydį 1° tikslumu.

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\angle A,$

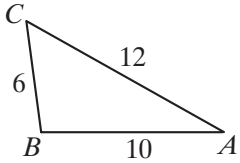
$6^2 = 10^2 + 12^2 - 2 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \cos\angle A,$

$36 = 100 + 144 - 240 \cdot \cos\angle A,$

$240 \cdot \cos\angle A = 208,$

$\cos\angle A = \frac{208}{240} \approx 0{,}867, \quad \angle A \approx 30°.$

Atsakymas. $\angle A \approx 30°$.



2.9. Įbrėžtiniai kampai

X klasėje sužinojote, koks kampas vadinamas centriniu kampu.
Šiame atverstinyje susipažinsite su *įbrėžtiniu kampu* bei sužinosite, kaip siejasi centrinio ir įbrėžtinio kampų dydžiai.

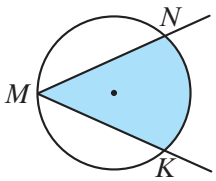


1 užduotis.

1) Nubrėžkite apskritimą, kurio centras yra O, ir pažymėkite apskritimo tašką B.
2) Nubraižykite kampą, kurio viršūnė būtų taške B, o kraštinės kirstų apskritimą taškuose A ir C.

Kampas, kurio viršūnė yra apskritimo taškas, o kraštinės kerta tą apskritimą, vadinamas ***įbrėžtiniù kampù***. $\angle NMK$ — įbrėžtinis.

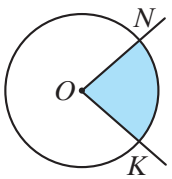
Sakoma, kad pavaizduotas įbrėžtinis kampas NMK remiasi į lanką NK (rašoma: $\smile NK$).



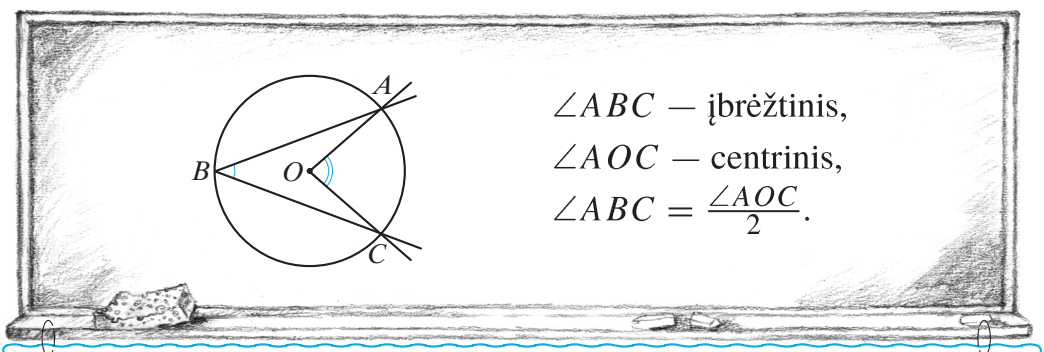
3) Nubraižykite centrinį kampą AOC. Įbrėžtinis kampas ABC ir centrinis kampas AOC remiasi į tą patį lanką AC.

Kampas, kurio viršūnė yra apskritimo centras, vadinamas ***centriniù kampù***. $\angle NOK$ — centrinis.

Sakoma, kad pavaizduotas centrinis kampas NOK remiasi į lanką NK.



4) Išmatuokite kampų ABC ir AOC dydžius. Jei tiksliai išmatavote, tai turėjote gauti kampą ABC dvigubai mažesnį už kampą AOC, t. y. $\angle ABC = \frac{\angle AOC}{2}$.

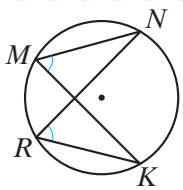


Įbrėžtinio kampo dydis lygus pusei jį atitinkančio centrinio kampo dydžio.

2 užduotis.

1) Nubrėžkite apskritimą, kurio centras yra O. Nubraižykite centrinį kampą $AOC = 60°$ ir jį atitinkantį įbrėžtinį kampą ABC. Nubraižykite kitą įbrėžtinį kampą ADC, atitinkantį tą patį centrinį kampą AOC.
2) Kam lygus įbrėžtinio kampo ABC dydis? Kam lygus įbrėžtinio kampo ADC dydis?
3) Ar $\angle ABC = \angle ADC$?

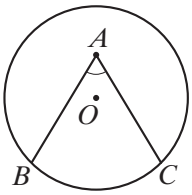
Įbrėžtiniai kampai, kurie remiasi į tą patį lanką, yra lygūs.

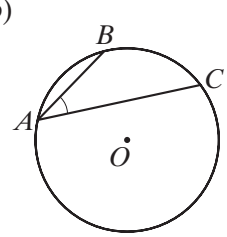


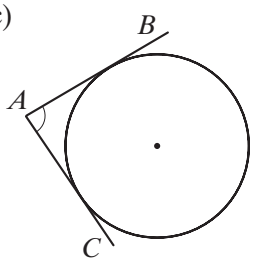
$\angle NMK = \angle NRK$.

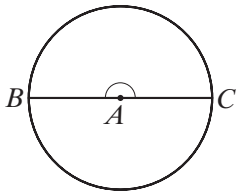
2.9. Uždaviniai

209. Ar kampas BAC yra įbrėžtinis? Paaiškinkite kodėl.

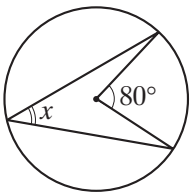
a) 

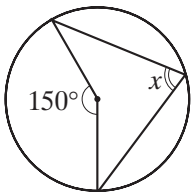
b) 

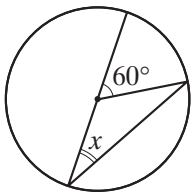
c) 

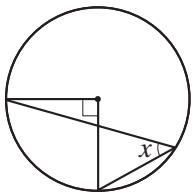
d) 

210. Pavaizduotas įbrėžtinis kampas ir jį atitinkantis centrinis kampas. Naudodamiesi brėžinio duomenimis, apskaičiuokite kampo x dydį.

a) 

b) 

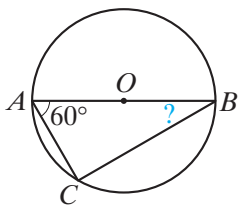
c) 

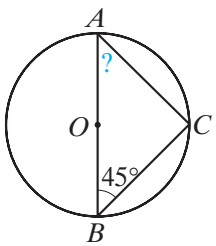
d) 

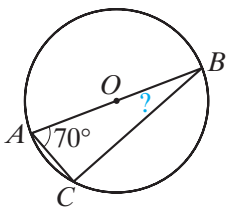
211. 1) Nubrėžkite apskritimą, kurio centras yra O, ir apskritimo skersmenį AB.
2) Kokios rūšies yra kampas AOB? Koks yra kampo AOB dydis?
3) Nubraižykite įbrėžtinį kampą ACB ir apskaičiuokite jo dydį.

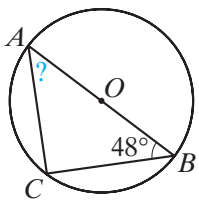
Įbrėžtinis kampas, kuris remiasi į skersmenį, yra statusis.

212. Įbrėžtinis kampas ACB remiasi į apskritimo, kurio centras yra O, skersmenį. Naudodamiesi brėžinio duomenimis, apskaičiuokite klaustuku pažymėto kampo dydį.

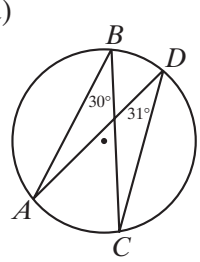
a) 

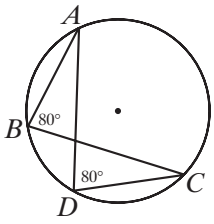
b) 

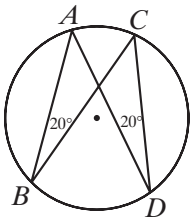
c) 

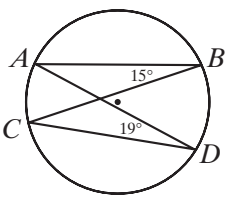
d) 

213. Pavaizduoti įbrėžtiniai kampai ABC ir ADC ir nurodyti jų dydžiai. Pažvelgę į brėžinį, nustatykite, ar šie dydžiai gali būti teisingi.

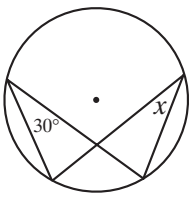
a) 

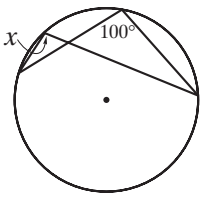
b) 

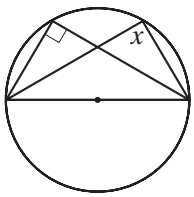
c) 

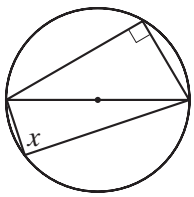
d) 

214. Naudodamiesi brėžinio duomenimis, raskite kampo x dydį.

a) 

b) 

c) 

d) 

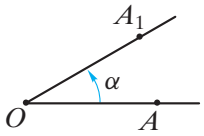
Apibendriname

Posūkių kampai

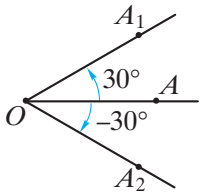
Kampas, kurį gauname sukdami spindulį apie jo pradžios tašką, vadinamas *pósūkio kampù*.

Posūkio kampas, kurį gauname sukdami spindulį:

- prieš laikrodžio rodyklę, laikomas *teigiamúoju kampù*;
- pagal laikrodžio rodyklę, laikomas *neigiamúoju kampù*.



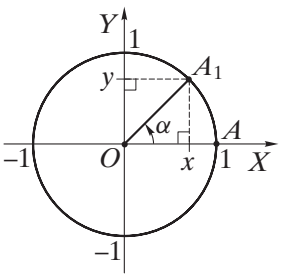
$\angle AOA_1 = \alpha$ — posūkio kampas.

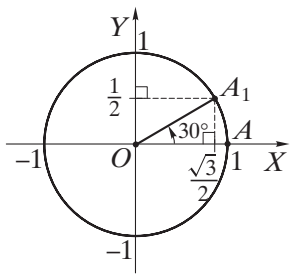


$\angle AOA_1 = 30°$,
$\angle AOA_2 = -30°$.

Posūkio kampo sinusas*, *kosinusas*, *tangentas

Posūkių kampai dažnai vaizduojami stačiakampėje koordinačių plokšumoje OXY, sukant spindulį OX apie koordinačių pradžios tašką O. Sukant spindulį OX apie O, taškas $A(1; 0)$ juda apskritimu, kurio centras yra O, o spindulys lygus 1.





Pósūkio kam̃po $AOA_1 = \alpha$:

- *sìnusu* vadinama taško A_1 ordinatė, t. y. $\sin\alpha = y$;
- *kòsinusu* vadinama taško A_1 abscisė, t. y. $\cos\alpha = x$;
- *tángentu* vadinamas taško A_1 ordinatės ir abscisės santykis, t. y. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

  $\operatorname{tg}\alpha$ neturi prasmės, kai $\alpha = 90° + 180° \cdot k$, $k \in \mathbf{Z}$.

$\sin 30° = \frac{1}{2}$,

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

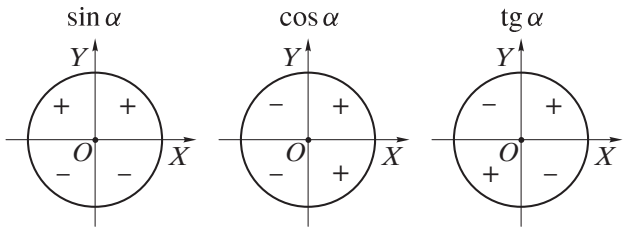
$\operatorname{tg} 30° = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\sin\alpha > 0$, kai $\alpha \in$ I arba II ketvirčiui,
$\sin\alpha < 0$, kai $\alpha \in$ III arba IV ketvirčiui;

$\cos\alpha > 0$, kai $\alpha \in$ I arba IV ketvirčiui,
$\cos\alpha < 0$, kai $\alpha \in$ II arba III ketvirčiui;

$\operatorname{tg}\alpha > 0$, kai $\alpha \in$ I arba III ketvirčiui,
$\operatorname{tg}\alpha < 0$, kai $\alpha \in$ II arba IV ketvirčiui.

Posūkių kampų $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ir $\operatorname{tg}\alpha$ ženklai koordinačių plokštumos ketvirčiuose:



$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$,

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$,

$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$;

$\sin(\alpha + 360° \cdot k) = \sin\alpha$, $k \in \mathbf{Z}$,

$\cos(\alpha + 360° \cdot k) = \cos\alpha$, $k \in \mathbf{Z}$,

$\operatorname{tg}(\alpha + 180° \cdot k) = \operatorname{tg}\alpha$, $k \in \mathbf{Z}$;

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

$\sin(-30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$,

$\cos(-30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\operatorname{tg}(-30°) = -\operatorname{tg} 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

$\sin 390° = \sin(30° + 360°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$,

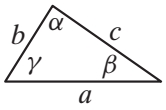
$\cos(-330°) = \cos\big(30° + 360° \cdot (-1)\big) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\operatorname{tg} 390° = \operatorname{tg}(30° + 180° \cdot 2) = \operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

$\sin^2 13° + \cos^2 13° = 1$.

Trikampio ploto formulė

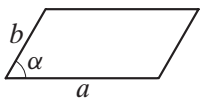
Trikampio plotas lygus dviejų kraštinių ilgių ir kampo tarp tų kraštinių sinuso sandaugos pusei:



$$S = \tfrac{1}{2}ab\sin\gamma = \tfrac{1}{2}bc\sin\alpha = \tfrac{1}{2}ac\sin\beta.$$

Lygiagretainio ploto formulė

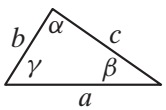
Lygiagretainio plotas lygus dviejų gretimų kraštinių ilgių ir kampo tarp tų kraštinių sinuso sandaugai:



$$S = ab\sin\alpha.$$

Sinusų teorema

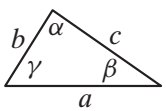
Trikampio kraštinių ilgiai yra proporcingi prieš jas esančių kampų sinusams:



$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Kosinusų teorema

Trikampio kraštinės ilgio kvadratas lygus kitų dviejų kraštinių ilgių kvadratų sumai atėmus dvigubą tų kraštinių ilgių ir kampo tarp tų kraštinių kosinuso sandaugą:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

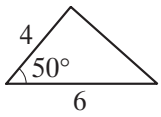
Įbrėžtiniai kampai

Kampas, kurio viršūnė yra apskritimo taškas, o kraštinės kerta tą apskritimą, vadinamas *įbrėžtiniù kampù*.

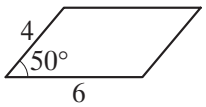
Įbrėžtinio kampo dydis lygus pusei jį atitinkančio centrinio kampo dydžio.

Įbrėžtinis kampas, kuris remiasi į skersmenį, yra statusis.

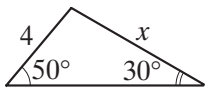
Įbrėžtiniai kampai, kurie remiasi į tą patį lanką, yra lygūs.



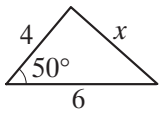
$S = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4\cdot\sin 50^\circ = 12\cdot\sin 50^\circ,$
$S \approx 12\cdot 0{,}766 = 9{,}192.$



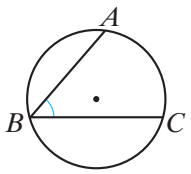
$S = 6\cdot 4\cdot\sin 50^\circ = 24\cdot\sin 50^\circ,$
$S \approx 24\cdot 0{,}766 = 18{,}384.$



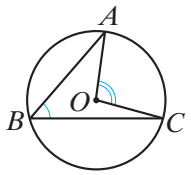
$\frac{4}{\sin 30^\circ} = \frac{x}{\sin 50^\circ}, \quad x = \frac{4\cdot\sin 50^\circ}{\sin 30^\circ} \approx 6{,}1.$



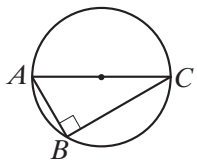
$x^2 = 6^2 + 4^2 - 2\cdot 6\cdot 4\cdot\cos 50^\circ =$
$= 52 - 48\cdot\cos 50^\circ \approx 52 - 48\cdot 0{,}643 = 21{,}136,$
$x \approx \sqrt{21{,}136} \approx 4{,}6.$



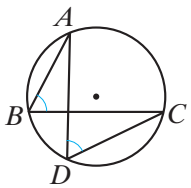
$\angle ABC$ — įbrėžtinis kampas.



$\angle ABC = \frac{\angle AOC}{2}.$



AC — skersmuo, $\angle B = 90^\circ$.



$\angle ABC = \angle ADC.$

215. Mechaninio laikrodžio valandinę rodyklę pasukame:
a) 3 valandas atgal; b) 2 valandas pirmyn; c) 6,5 valandos atgal; d) 13,5 valandos pirmyn.
Kokiu kampu pasisuka valandinė rodyklė?

216. Kuriame koordinačių plokštumos OXY ketvirtyje yra posūkio kampas α, jei:
a) $\alpha = 115°$? b) $\alpha = -195°$? c) $\alpha = 2010°$? d) $\alpha = -3700°$?

217. 1) Kuriame koordinačių plokštumos OXY ketvirtyje (ar ašyje) yra posūkio kampas α, jei:
a) $\alpha = 1845°$? b) $\alpha = 4620°$? c) $\alpha = -1560°$? d) $\alpha = -8820°$?
2) Kiekvienu atveju apskaičiuokite posūkio kampo α sinuso, kosinuso ir tangento reikšmes.

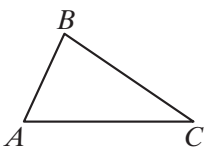
218. Apskaičiuokite reiškinio reikšmę.
a) $2\sin 60° + \cos 60° - \operatorname{tg} 60°$; b) $3\cos 0° - 4\sin 90° + 5\operatorname{tg} 180°$;
c) $\sin 30° + \cos 30° - \operatorname{tg} 30° \cdot \sin 60°$; d) $\sqrt{3}\cos 30° \cdot \sin 60° - 3\operatorname{tg} 60°$;
e) $\sin 120° + \sin 135° + \cos 150° - \cos 135° + \operatorname{tg} 135°$;
f) $\sin 150° + \cos 120° + \sin 120° - \operatorname{tg} 150° + \cos 150°$.

$2\sin 45° + 2\cos 45° - \operatorname{tg} 45° = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \sqrt{2} + \sqrt{2} - 1 = 2\sqrt{2} - 1.$

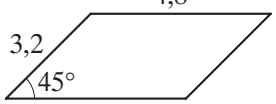
219. Įsitikinkite, kad lygybė yra teisinga.
a) $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \cos^2\alpha$; b) $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \sin^2\alpha$; c) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha$;
d) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - 2\sin\alpha\cos\alpha$; e) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1$.

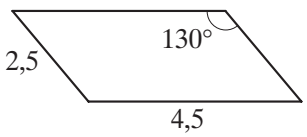
220. Suprastinkite reiškinį.
a) $\frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{\sin^2\alpha}$; b) $\frac{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}{\cos^2\alpha}$; c) $\frac{1}{1+\cos\alpha} + \frac{1}{1-\cos\alpha}$; d) $\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} + \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$;
e) $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 1$; f) $\cos^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha - \cos^2\alpha - 1$.

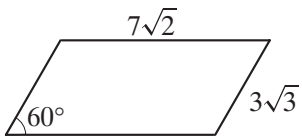
221. Apskaičiuokite trikampio ABC plotą (0,1 tikslumu), kai:
a) $BC = 18$, $AC = 20$, $\angle C = 77°$;
b) $BC = 4\sqrt{3}$, $AB = 6{,}2$, $\angle B = 150°$;
c) $AB = 4{,}5$, $AC = 2{,}4$, $\angle A = 168°$.



222. Naudodamiesi brėžinio duomenimis, apskaičiuokite lygiagretainio plotą (vienetų tikslumu).

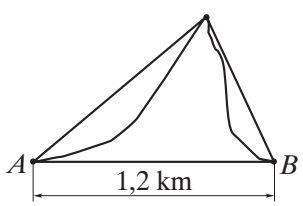
a)


b)


c)


223. Apskaičiuokite trikampio ABC:
a) kraštinės AC ilgį, kai $BC = 10{,}5$ cm, $\angle A = 60°$, $\angle B = 50°$;
b) kraštinės AB ilgį, kai $BC = 20{,}3$ cm, $\angle A = 115°$, $\angle C = 40°$;
c) kraštinės BC ilgį, kai $AB = 6{,}5$ cm, $\angle B = 60°$, $\angle C = 70°$.
Atsakymą parašykite 0,1 cm tikslumu.

224. Du turistai yra priešingose kalno pusėse (jie piešinyje pažymėti taškais A ir B). Vienas turistas mato kalno viršūnę 40° kampu, o kitas — 65° kampu. Apskaičiuokite, koks yra kiekvieno turisto atstumas iki kalno viršūnės, jei $AB = 1{,}2$ km. Atsakymą parašykite 0,1 km tikslumu.



225. Lygiagretainio trumpesnioji įstrižainė su kraštinėmis sudaro 60° ir 45° dydžio kampus. Apskaičiuokite šios įstrižainės ilgį ir lygiagretainio perimetrą 0,1 cm tikslumu, jei trumpesniosios kraštinės ilgis yra $\sqrt{2}$ cm.

226. Apskaičiuokite trikampio ABC:
a) kraštinės BC ilgį, kai $AC = 2\,\text{dm}$, $AB = 4\,\text{dm}$, $\angle A = 60°$;
b) kraštinės AC ilgį, kai $AB = 2\sqrt{3}\,\text{m}$, $BC = 9\,\text{m}$, $\angle B = 45°$;
c) kraštinės AB ilgį, kai $AC = 3\,\text{cm}$, $BC = 2\sqrt{2}\,\text{cm}$, $\angle C = 45°$.
Atsakymą suapvalinkite iki dešimtųjų.

227. Stačiakampio $ABCD$ įstrižainės ilgis yra $2\sqrt{2}\,\text{cm}$. Įstrižainės AC ir BD susikerta taške O, kampo BOC dydis yra 135°. Apskaičiuokite kraštinės AD ilgį 0,1 cm tikslumu.

228. Stačiakampio įstrižainės susikirsdamos sudaro 50° kampą. Kraštinės, esančios prieš šį kampą, ilgis yra 6 cm. Apskaičiuokite stačiakampio įstrižainės ilgį 0,1 cm tikslumu.

229. Lygiagretainio dviejų kraštinių ilgiai yra $\sqrt{3}\,\text{dm}$ ir 2 dm, o smailusis kampas lygus 30°. Apskaičiuokite įstrižainių ilgius 0,01 dm tikslumu.

230. Lygiagretainio dviejų kraštinių ilgiai yra 3,6 dm ir 4,8 dm. Tarp šių kraštinių esančio kampo dydis lygus 45°. Apskaičiuokite lygiagretainio ilgesniosios įstrižainės ilgį 0,1 dm tikslumu.

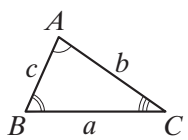
231. Apskaičiuokite trikampio didžiausio kampo dydį, kai jo kraštinių ilgiai yra:
a) 13, 12, 14; b) 20, 21, 30; c) 60, 109, 91.
Atsakymą parašykite 1° tikslumu.

Didžiausias trikampio kampas yra prieš ilgiausią trikampio kraštinę.

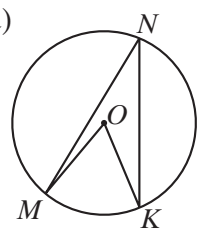
232. Trikampio kraštinių ilgiai yra 25 cm, 29 cm ir 36 cm. Apskaičiuokite trikampio trumpiausios ir ilgiausios aukštinių ilgius 0,01 cm tikslumu.

233. Užbaikite pildyti lentelę (S — trikampio ABC plotas). Kraštinių ilgius ir plotą parašykite dešimtųjų tikslumu, o kampų dydžius — 1° tikslumu.

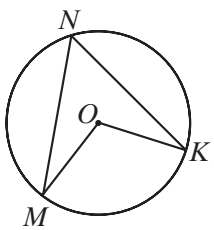
	a	b	c	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	S
a)			3,2	40°		60°	
b)	2,4	1,8				50°	
c)	4,8		3,4		162°		



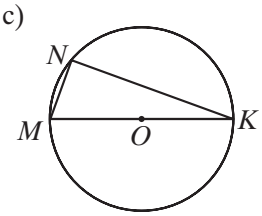
234. Apskaičiuokite įbrėžtinio kampo MNK dydį.

a) 

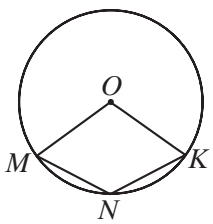
$\angle MOK = 65°$;

b) 

$\angle MOK = 110°$;

c) 

$\angle MOK = 180°$;

d) 

$\angle MOK = 110°$.

235. Centrinis kampas yra 28° didesnis už įbrėžtinį kampą, besiremiantį į tą patį lanką. Apskaičiuokite abiejų kampų dydžius.

236. Centrinio kampo ir į tą patį lanką besiremiančio įbrėžtinio kampo dydžių suma lygi 180°. Apskaičiuokite kiekvieno kampo dydį.

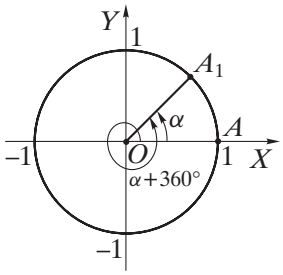
237. Aš iš draugės Almantės pasiskolinau 10 Eur. Eidama į parduotuvę juos pamečiau. Laimei, sutikau draugę Editą, kuri man paskolino 5 Eur. Parduotuvėje nusipirkau saldainį už 2 Eur. Man liko 3 Eur, kuriuos grąžinau Almantei. Taigi likau skolinga: $10 - 3 = 7$ (Eur) Almantei ir 5 Eur — Editai. Kadangi už 2 Eur pirkau saldainį, tai iš viso suskaičiuoju $7 + 5 + 2 = 14$ (Eur). Bet juk skolinausi $10 + 5 = 15$ (Eur)! Kur dingo 1 Eur?

Kai kurių trigonometrinių formulių įrodymai

Įrodykime, kad posūkių kampų $\alpha + 360^\circ \cdot k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, *sinusų reikšmės yra lygios posūkio kampo* α *sinuso reikšmei, t. y.*

$$\sin(\alpha + 360^\circ \cdot k) = \sin\alpha, \quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

Akivaizdu, kad pasukus vienetinio apskritimo spindulį OA kampu α ir kampu $\alpha + 360^\circ$, galutinė spindulio padėtis OA_1 bus ta pati (žr. pav. dešinėje).
Spindulio OA_1 padėtis nepasikeis ir pasukus spindulį OA kampu $\alpha + 720^\circ = \alpha + 360^\circ \cdot 2$, kampu $\alpha + 1080^\circ = \alpha + 360^\circ \cdot 3$ ir t. t.
Vadinasi,

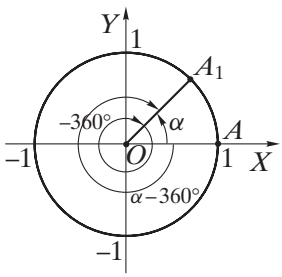


$$\sin(\alpha + 360^\circ \cdot k) = \sin\alpha, \quad k \in \boldsymbol{N}.$$

Analogiškai įsitikiname, kad lygybė

$$\sin(\alpha + 360^\circ \cdot k) = \sin\alpha$$

yra teisinga, kai $k \in -\boldsymbol{N}$ (k yra neigiamasis sveikasis skaičius).
Kai $k = 0$, tai $\sin(\alpha + 360^\circ \cdot k) = \sin(\alpha + 360^\circ \cdot 0) = \sin\alpha$.
Vadinasi,



$$\sin(\alpha + 360^\circ \cdot k) = \sin\alpha, \quad \text{kai} \quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

1 užduotis. Įsitikinkite, kad yra teisingos lygybės:

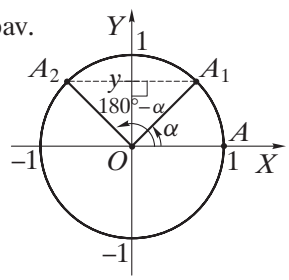
$$\cos(\alpha + 360^\circ \cdot k) = \cos\alpha \quad \text{ir} \quad \operatorname{tg}(\alpha + 360^\circ \cdot k) = \operatorname{tg}\alpha, \quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

Įrodykime, kad posūkio kampo $(180^\circ - \alpha)$ *sinuso reikšmė yra lygi posūkio kampo* α *sinuso reikšmei, t. y.*

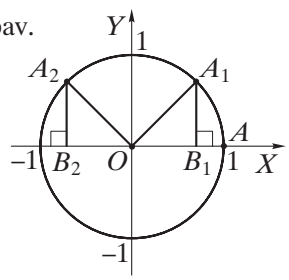
$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha.$$

1) Pavaizduokime posūkio kampus α ir $(180^\circ - \alpha)$ (žr. 1 pav.). Reikia įsitikinti, kad taškų A_1 ir A_2 koordinatės y yra lygios.
2) Nubrėžkime $A_1B_1 \perp OX$ ir $A_2B_2 \perp OX$ (žr. 2 pav.).

1 pav.



2 pav.



3) Trikampiai OB_1A_1 ir OB_2A_2 yra lygūs (paaiškinkite kodėl).
4) Vadinasi, $A_1B_1 = A_2B_2$. Taigi taškų A_1 ir A_2 koordinatės y yra lygios, t. y.

$$\sin\left(180^\circ - \alpha\right) = \sin\alpha.$$

2 užduotis. Įsitikinkite, kad yra teisingos lygybės:

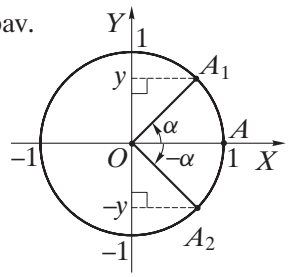
$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha \quad \text{ir} \quad \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Įrodykime, kad posūkio kampo $-\alpha$ sinuso reikšmė yra priešinga posūkio kampo α sinuso reikšmei, t. y.

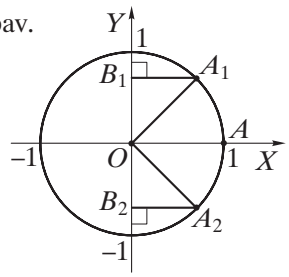
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha.$$

1) Pavaizduokime posūkio kampus α ir $-\alpha$ (žr. 1 pav.). Reikia įsitikinti, kad taškų A_1 ir A_2 koordinatės y yra vienas kitam priešingi skaičiai.

1 pav.



2 pav.



2) Trikampiai OB_1A_1 ir OB_2A_2 (žr. 2 pav.) yra lygūs (paaiškinkite kodėl).
3) Vadinasi, $B_1O = B_2O$. Be to, B_1 ir B_2 žymi skaičius, kurie yra vienas kitam priešingi. Todėl

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha.$$

3 užduotis. Įsitikinkite, kad yra teisingos lygybės:

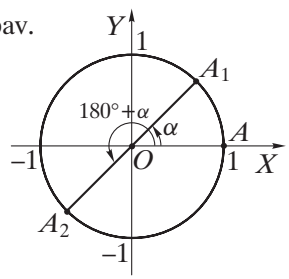
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \quad \text{ir} \quad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Įrodykime, kad posūkių kampų $\alpha + 180^\circ \cdot k$, $k \in \mathbf{Z}$, tangentų reikšmės yra lygios posūkio kampo α tangento reikšmei, t. y.

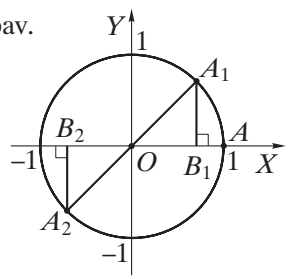
$$\operatorname{tg}(\alpha + 180^\circ \cdot k) = \operatorname{tg}\alpha, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

1) Pavaizduokime posūkio kampus α ir $(180^\circ + \alpha)$ (žr. 1 pav.). Reikia įsitikinti, kad taškų A_1 ir A_2 atitinkamos koordinatės x ir koordinatės y yra vienas kitam priešingi skaičiai.

1 pav.



2 pav.



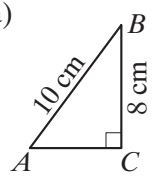
2) Trikampiai OB_1A_1 ir OB_2A_2 (žr. 2 pav.) yra lygūs (paaiškinkite kodėl).
3) Vadinasi, $A_1B_1 = A_2B_2$, $B_1O = B_2O$. Be to, taškų A_1 ir A_2 koordinatės x ir y yra vienas kitam priešingi skaičiai, t. y. $A_1(x; y)$, $A_2(-x; -y)$. Todėl

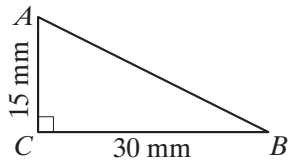
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{tg}(\alpha + 180^\circ) = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha.$$

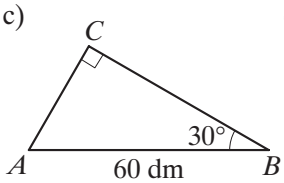
4) Akivaizdu, kad teisinga ir lygybė $\operatorname{tg}(\alpha + 180^\circ \cdot k) = \operatorname{tg}\alpha$, kai $k \in \mathbf{N}$.
5) Įsitikinkite, kad lygybė $\operatorname{tg}(\alpha + 180^\circ \cdot k) = \operatorname{tg}\alpha$ teisinga, kai $k = 0$ ir k yra neigiamasis sveikasis skaičius.
Taigi $\operatorname{tg}(\alpha + 180^\circ \cdot k) = \operatorname{tg}\alpha$, $k \in \mathbf{Z}$.

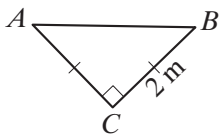
Trikampiai

238. Apskaičiuokite pavaizduoto stačiojo trikampio perimetrą ir plotą.

a) 

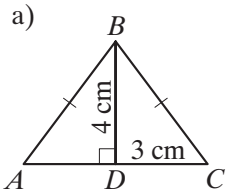
b) 

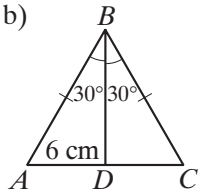
c) 

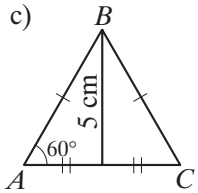
d) 

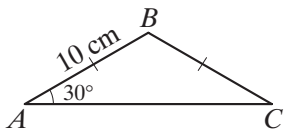
- Perimetras — visų kraštinių ilgių suma.
- Stačiojo trikampio vienas kampas yra status ($= 90°$), o kiti du kampai yra smailūs ($< 90°$).
- Stačiojo trikampio smailiųjų kampų dydžių suma lygi $90°$.
- Stačiojo trikampio įžambinės c ir statinių a ir b ilgius sieja lygybė $c^2 = a^2 + b^2$ (Pitagòro teorema).

239. Apskaičiuokite pavaizduoto lygiašonio trikampio perimetrą ir plotą.

a) 

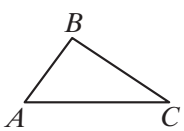
b) 

c) 

d) 

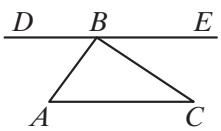
- Lygiašonio trikampio dvi kraštinės yra vienodo ilgio. Lygiosios kraštinės yra vadinamos *šóninėmis kraštìnėmis*, o trečioji — *pãgrindu*.
- Lygiašonio trikampio kampai prie pagrindo yra lygūs.
- Lygiašonio trikampio aukštinė, nubrėžta į pagrindą, yra ir pusiaukampinė, ir pusiaukraštinė.
- Lygiakraščio trikampio visos trys kraštinės yra lygios.
- Lygiakraščio trikampio visi trys kampai yra lygūs ($= 60°$).

240. Įrodykite, kad trikampio kampų dydžių suma yra lygi $180°$ (ištiestinio kampo dydžiui).
1) Nubraižykite kokį nors trikampį ABC.



Reikia įrodyti, kad $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

2) Per bet kurią trikampio viršūnę nubrėžkite tiesę, lygiagrečią su prieš tą viršūnę esančia kraštine.



$DE \parallel AC$.

3) $\angle DBA + \angle ABC + \angle EBC = 180°$ (paaiškinkite kodėl).
4) Įrodykite, kad $\angle A = \angle DBA$, $\angle C = \angle EBC$.
5) Pabaikite įrodymą.

Judėjimo uždaviniai

241. Jonas važiuoja dviračiu 10 kilometrų per valandą greičiu.
1) Kiek kilometrų nuvažiuos Jonas per:
a) 1 valandą? b) 2 valandas? c) 3 valandas? d) 10 valandų? e) t valandų?
f) 30 minučių? g) 20 minučių? h) 10 minučių? i) 1 minutę? j) m minučių?
2) Koks yra Jono važiavimo greitis:
a) kilometrais per minutę? b) metrais per valandą? c) metrais per minutę?

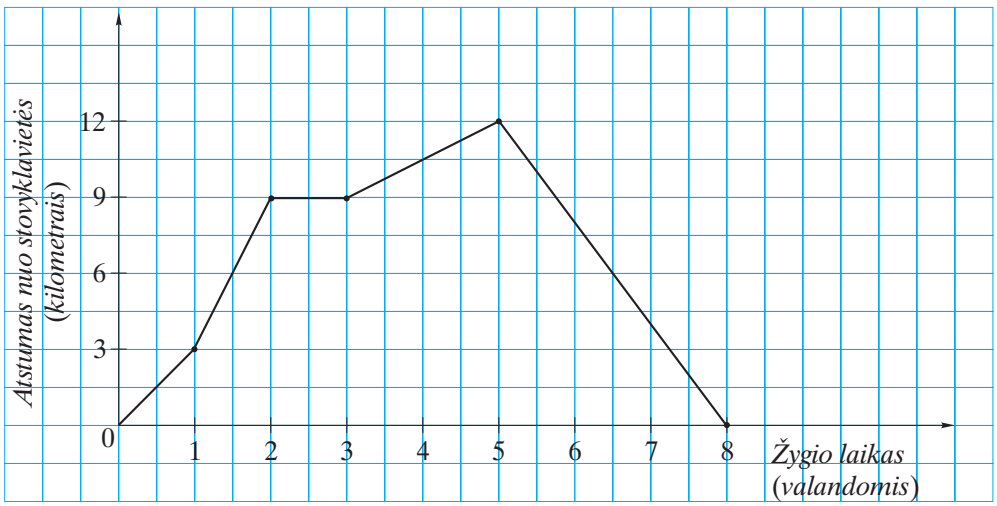
Kelio formulė: $s = v \cdot t$; čia s — kelias (km), v — greitis (km/h), t — laikas (h).
$1\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 1000\ \frac{\text{m}}{\text{h}} = \frac{1000}{60}\ \frac{\text{m}}{\text{min}}$.

242. Ona s kilometrų nuvažiavo per t valandų. Kokiu vidutiniu greičiu v važiavo Ona, jei:
a) $s = 100$ km, $t = 2$ h? b) $s = 220$ km, $t = 4$ h? c) $s = 300$ km, $t = 2$ h 30 min?
d) $s = 12\,000$ m, $t = 50$ min? e) $s = 78{,}6$ km, $t = 1\frac{1}{3}$ h?

Vidutinis greitis $= \frac{\text{Nuvažiuotas atstumas}}{\text{Važiavimo laikas}}$.

243. Autobusas nuo Vìlniaus iki Kaũno pusę kelio važiavo pastoviu 80 km/h greičiu, o kitą pusę kelio važiavo 120 km/h greičiu. Koks yra vidutinis autobuso važiavimo greitis, jei atstumas tarp Vilniaus ir Kaũno lygus 100 km?

244. Stačiakampėje koordinačių plokštumoje pavaizduota, kaip toli nuo stovyklavietės buvo nutolę turistai kiekvienu 8 valandų trukmės žygio momentu.



1) Kiek kilometrų turistai įveikė:
a) pirmąją žygio valandą? b) antrąją žygio valandą?
c) nuo 3-os iki 5-os žygio valandos? d) per 8 valandas?
2) Kiek laiko ir kuriomis žygio valandomis turistai ilsėjosi?
3) Kokiu didžiausiu atstumu nuo stovyklavietės buvo nutolę turistai?
4) Ar galima teigti, kad turistai grįžo į stovyklavietę?
5) Koks buvo vidutinis turistų greitis:
a) per pirmąsias dvi žygio valandas? b) per paskutines 5 žygio valandas?
c) grįžtant į stovyklavietę?

Testas

245. Kuriam koordinačių plokštumos OXY ketvirčiui priklauso posūkio kampas, lygus 380°?

A I **B** II **C** III **D** IV **E** Nė vienam

246. Kokiu kampu pasisuka mechaninio laikrodžio valandinė rodyklė, sukama 3 valandas atgal?

A 120° **B** −90° **C** 90° **D** −120° **E** −30°

247. Kuriam koordinačių plokštumos OXY ketvirčiui priklauso kampas α, jei $\sin\alpha < 0$ ir $\cos\alpha < 0$.

A I **B** II **C** III **D** IV **E** Nė vienam

248. $\operatorname{tg} 270° =$

A 1 **B** −1 **C** 0 **D** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **E** Neegzistuoja

249. Jei $\sin\alpha = 0{,}6$ ir kampas α yra smailusis, tai $\cos\alpha =$

A 0,4 **B** −0,8 **C** 0,8 **D** 1 **E** −0,4

250. Trikampio dviejų kraštinių ilgiai yra 8 cm ir 10 cm, o kampas tarp tų kraštinių lygus 30°. Kam lygus šio trikampio plotas?

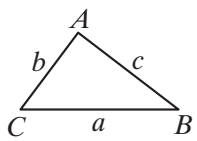
A 160 cm^2 **B** 80 cm^2 **C** 40 cm^2 **D** 20 cm^2 **E** 10 cm^2

251. Lygiagretainio, kurio kraštinių ilgiai yra 10 cm ir 20 cm, o smailusis kampas — 45°, plotas lygus:

A 200 cm^2 **B** $200\sqrt{2}$ cm^2 **C** $100\sqrt{2}$ cm^2 **D** 100 cm^2 **E** $50\sqrt{2}$ cm^2

252. a) $\frac{a}{\sin\angle A} =$

A $\frac{\sin\angle B}{b}$ **B** $\frac{\sin\angle C}{c}$ **C** $\frac{b}{\sin\angle B}$ **D** 1 **E** Nustatyti neįmanoma

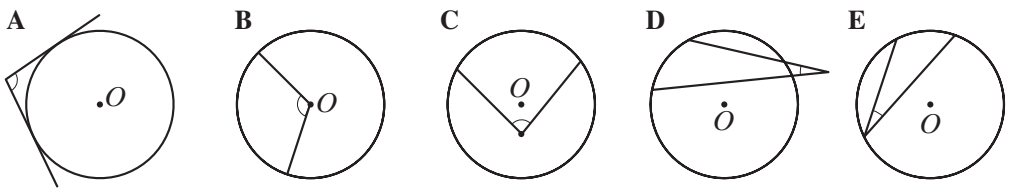


b) Kuria lygybe remiantis galima apskaičiuoti kraštinės a ilgį?

A $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\angle A$ **B** $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle B$

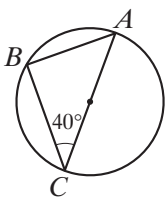
C $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle C$ **D** $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle A$ **E** Nė viena iš pateiktų

253. Kuris pavaizduotų kampų yra įbrėžtinis?



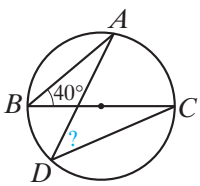
254. AC yra apskritimo skersmuo. Įbrėžtinio kampo A dydis lygus:

A 40° **B** 50° **C** 90° **D** 180° **E** Nustatyti neįmanoma



255. Įbrėžtinio kampo ABC dydis lygus 40°. Koks yra įbrėžtinio kampo ADC dydis?

A 80° **B** 40° **C** 20° **D** 90° **E** Nustatyti neįmanoma



256. Stačiojo lygiašonio trikampio kampų dydžiai yra:

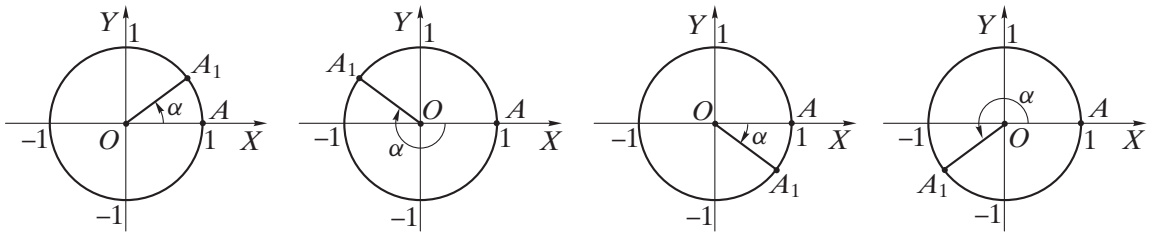
A 30°, 60°, 90° **B** 60°, 60°, 60° **C** 30°, 30°, 120° **D** 45°, 45°, 90°
E Vienas kampas lygus 90°, o kiti du — bet kurie smailieji

257. Rita per 3 h nuvažiavo 36 km. Jos vidutinis važiavimo greitis metrais per minutę lygus:

A 2000 m/min **B** 200 m/min **C** 20 m/min **D** 2 m/min **E** Nustatyti neįmanoma

258. Remdamiesi brėžinio duomenimis, užrašykite, kam lygus posūkio kampo $\alpha = \angle AOA_1$ sinusas, kosinusas ir tangentas, jei taško A_1 koordinatės yra:

a) (0,8; 0,6); b) (–0,8; 0,6); c) (0,8; –0,6); d) (–0,8; –0,6).



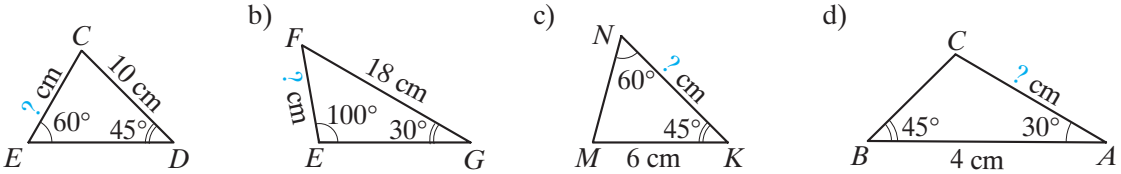
259. Raskite posūkio kampo α sinusą, kosinusą ir tangentą, kai α lygus:
a) 420°; b) 750°; c) −750°; d) −420°.

260. Apskaičiuokite.
a) $\sin 30° + \cos 30°$; b) $\operatorname{tg} 30° - \sin 60°$; c) $\operatorname{tg} 45° \cdot \sin 60°$; d) $\cos 60° : \operatorname{tg} 30°$;
e) $\sin^2 45° - \sin 0° + \cos^2 45°$; f) $\cos^2 60° + \operatorname{tg}^2 60° + \sin^2 60°$.

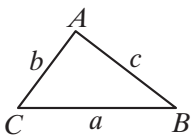
261. Apskaičiuokite trikampio ABC plotą, kai:
a) $AB = 15$ cm, $BC = 18$ cm, $\angle B = 30°$; b) $AB = 12$ cm, $AC = 10$ cm, $\angle A = 60°$;
c) $BC = 8$ cm, $AC = 11\sqrt{2}$ cm, $\angle C = 45°$; d) $AB = 20$ cm, $AC = 17$ cm, $\angle A = 150°$.

262. Apskaičiuokite klaustuku pažymėtos kraštinės ilgį (0,1 cm tikslumu).

a) b) c) d)

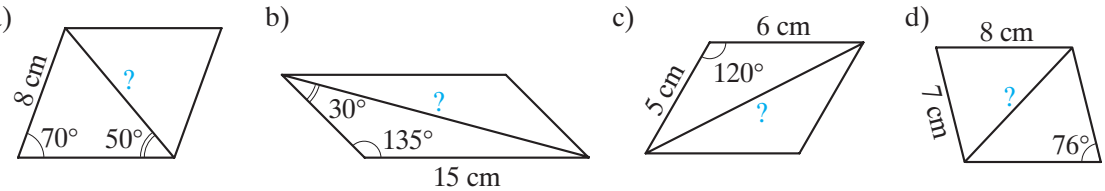


263. Apskaičiuokite (ir suapvalinkite iki dešimtųjų) trikampio ABC:
a) kraštinės a ilgį, kai $b = 8$, $c = 9$, $\angle A = 60°$;
b) kraštinės b ilgį, kai $a = 12$, $c = 14$, $\angle B = 30°$;
c) kraštinės c ilgį, kai $a = 8$, $b = 13$, $\angle C = 150°$.



264. Apskaičiuokite lygiagretainio klaustuku pažymėtos įstrižainės ilgį 0,01 cm tikslumu.

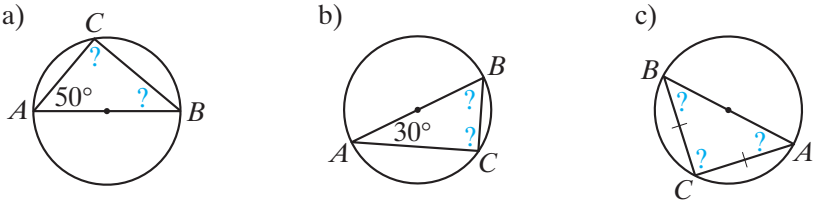
a) b) c) d)



265. Apskaičiuokite įbrėžtinio kampo ABC dydį, jei jį atitinkančio centrinio kampo AOC dydis yra:
a) 140°; b) 50°; c) 180°; d) 260°.

266. Naudodamiesi brėžinio duomenimis, apskaičiuokite klaustukais pažymėtų kampų dydžius (AB — apskritimo skersmuo).

a) b) c)



267. Rytas važiuoja 72 km/h greičiu. Kiek kilometrų nuvažiuos Rytas per 3 valandas? Koks yra jo važiavimo greitis metrais per minutę?

268. Lygiašonio trikampio šoninės kraštinės ilgis yra 25 dm, o aukštinės, nubrėžtos į pagrindą, ilgis — 20 dm. Apskaičiuokite trikampio perimetrą ir plotą.

Kartojame tai, ko prireiks 3 skyriuje

PRISIMINKIME

Kintamojo y priklausomybė nuo kintamojo x, kai kiekvienai galimai x reikšmei pagal kokią nors taisyklę priskiriama vienintelė y reikšmė, vadinama ***fùnkcine priklausomýbe***, arba ***fùnkcija***.

Rašoma: $y = f(x)$. *Sakoma*: Funkcija ygrek lygu ef nuo iks.

Vaizduojama: $X \xrightarrow{f} Y$ arba $f\colon X \longrightarrow Y$.

Vadinama:

x — funkcijos nepriklausomuoju kintamuoju arba funkcijos argumentu,

y — funkcijos priklausomuoju kintamuoju arba funkcijos reikšme,

X — visų galimų x reikšmių aibe arba funkcijos apibrėžimo sritimi,

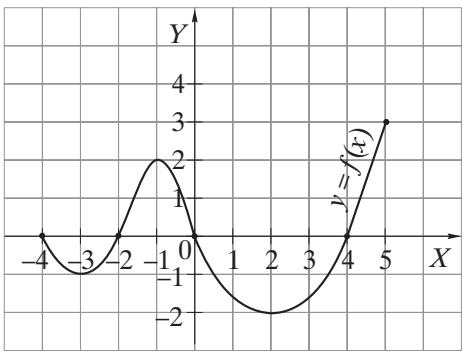
Y — visų galimų y reikšmių aibe arba funkcijos reikšmių sritimi,

f — taisykle, pagal kurią x reikšmėms priskiriamos y reikšmės,

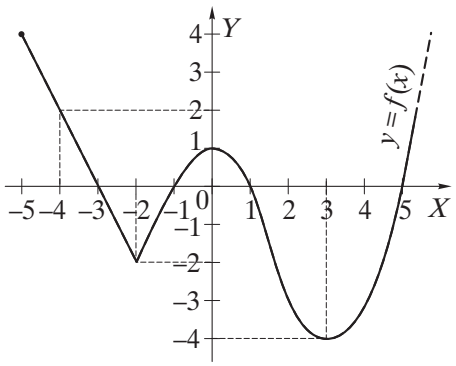
$f(x)$ — funkcijos reiškiniu.

Stačiakampės koordinačių plokštumos OXY taškų $(x; y)$ visuma, čia $y = f(x)$, vadinama *fùnkcijos* $y = f(x)$ *grãfiku*.

269. Pavaizduotas funkcijos $y = f(x)$ grafikas. Remdamiesi juo:



1) raskite funkcijos apibrėžimo sritį; reikšmių sritį;
2) nurodykite x reikšmes, su kuriomis funkcijos reikšmės yra teigiamos ($y > 0$); neigiamos ($y < 0$); lygios nuliui ($y = 0$);
3) nurodykite, kuriuose x reikšmių intervaluose funkcijos reikšmės mažėja; didėja;
4) nurodykite, ar funkcija turi didžiausią (mažiausią) reikšmę. Jei taip, tai kokia ta reikšmė ir su kuria x reikšme ji yra didžiausia (mažiausia).

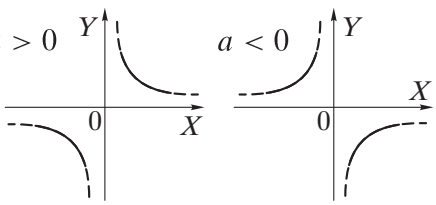


1) Apibrėžimo sritis yra intervalas $[-5; +\infty)$; reikšmių sritis yra intervalas $[-4; +\infty)$.
2) $y > 0$, kai $x \in [-5; -3), (-1; 1), (5; +\infty)$;
   $y < 0$, kai $x \in (-3; -1), (1; 5)$;
   $y = 0$, kai $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$, $x = 5$.
3) Funkcijos reikšmės mažėja, kai $x \in (-5; -2), (0; 3)$; didėja, kai $x \in (-2; 0), (3; +\infty)$.
4) Mažiausia funkcijos reikšmė $y = -4$, kai $x = 3$. Didžiausios reikšmės funkcija neturi.

270. Nubraižykite funkcijos $y = f(x)$ grafiką ir apibūdinkite funkciją, kai:

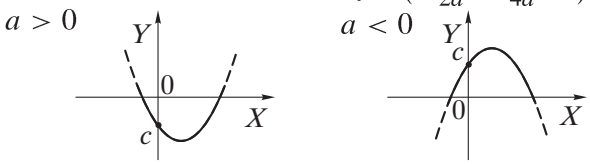
a) $f(x) = \frac{6}{x}$; b) $f(x) = -\frac{6}{x}$; c) $f(x) = x^2$; d) $f(x) = -x^2$.

Funkcijos $y = f(x) = \frac{a}{x}$ $(a \neq 0)$ grafikas yra *hiperbolė*.



Funkcijos $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ grafikas yra *parabolė*.

Parabolės viršūnės koordinatės yra $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2}{4a} + c\right)$.



Funkcijos

3 skyrius

3.1. Tiesinės funkcijos 74
3.2. Laipsninės funkcijos 76
3.3. Šaknies funkcijos 78
3.4. Rodiklinės funkcijos 80
3.5. Logaritminės funkcijos 82
3.6. Sinuso funkcija 84
3.7. Kosinuso funkcija 86
3.8. Tangento funkcija 88
Apibendriname 90
Sprendžiame 92
Besidomintiems 94
Rodiklinis kitimas
Geometrijos uždaviniai. Keturkampiai 96
Įvairūs uždaviniai. Tikimybės 97
Testas 98
Pasitikriname 99
Kartojame tai, ko prireiks 4 skyriuje 100

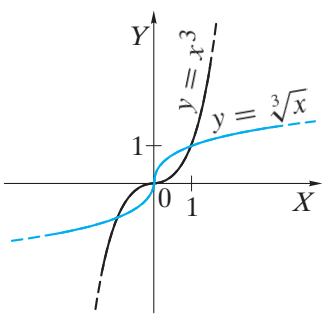
X klasėje nagrinėjome dviejų kintamųjų x ir y funkcines priklausomybes $y = f(x)$, kai:

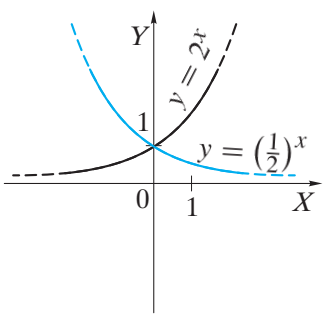
$$f(x) = ax + b, \quad f(x) = \frac{a}{x}, \quad f(x) = ax^2 + bx + c.$$

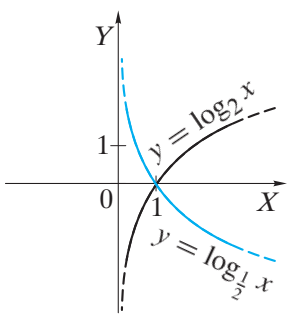
Šiame skyriuje nagrinėsime funkcijas $y = f(x)$, kai:

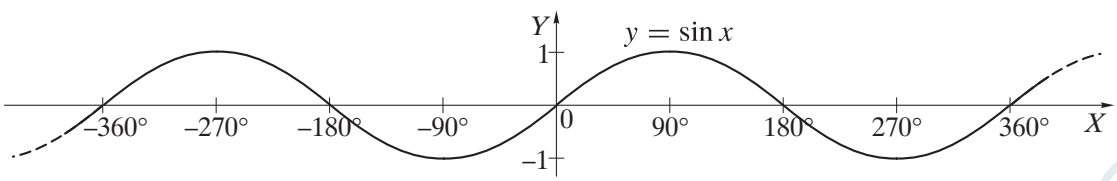
$$f(x) = x^n, \quad f(x) = \sqrt[n]{x}, \quad f(x) = a^x, \quad f(x) = \log_a x,$$
$$f(x) = \sin x, \quad f(x) = \cos x, \quad f(x) = \operatorname{tg} x.$$

Kai kurių šiame skyriuje nagrinėjamų funkcijų grafikų pavyzdžiai:







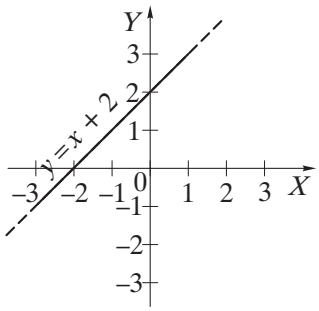


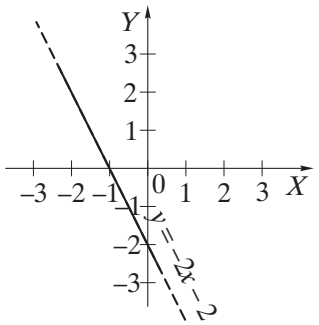
3.1. Tiesinės funkcijos

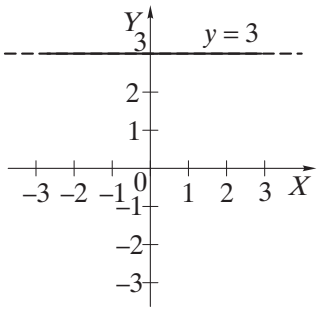
Šiame atverstinyje prisiminsime tiesines funkcijas, t. y. funkcijas $y = f(x) = ax + b$ (a, b — skaičiai).
Tiesinės funkcijos grafikas yra *tiesė*.



1 užduotis. Nubraižyti funkcijų $y = f(x) = x + 2$, $y = g(x) = -2x - 2$ ir $y = h(x) = 3$ grafikai.



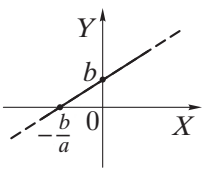




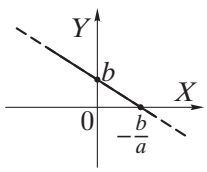
a) Kiekvienu atveju užrašykite, kam lygus tiesės $y = ax + b$ koeficientas a; koeficientas b.
b) Remdamiesi grafikais, apibūdinkite kiekvieną šią funkciją.
   1) Kokia yra funkcijos apibrėžimo sritis? reikšmių sritis?
   2) Su kuriomis x reikšmėmis funkcijos reikšmės yra teigiamos ($y > 0$)? neigiamos ($y < 0$)? lygios nuliui ($y = 0$)?
   3) Kuriame taške funkcijos grafikas kerta OY ašį?
   4) Kuriame x reikšmių intervale funkcijos reikšmės didėja (mažėja; yra pastovios)?
   5) Ar funkcija turi didžiausią (mažiausią) reikšmę?

$y = ax + b$

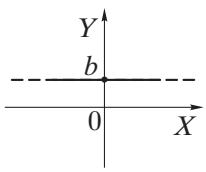
$a > 0$



$a < 0$



$a = 0$



Tiesė $y = ax + b$ ($a \neq 0$) ašį OY kerta taške $(0; b)$, o ašį OX — taške $\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$.

2 užduotis.
1) Nubrėžkite tieses:
   a) $y = x - 2$; b) $y = -2x + 2$; c) $y = -3$.

Stačiakampėje koordinačių plokštumoje OXY brėžiant tiesę $y = ax + b$, pakanka apskaičiuoti dviejų jos taškų koordinates, pažymėti tuos taškus ir per juos nubrėžti tiesę.

2) Apibūdinkite tiesinę funkciją $y = f(x)$, kai:
   a) $f(x) = x - 2$; b) $f(x) = -2x + 2$; c) $f(x) = -3$.

3.1. Uždaviniai

271. 1) Nubraižykite funkcijos $y = f(x)$ grafiką, kai:
a) $f(x) = x - 3$; b) $f(x) = -x - 3$; c) $f(x) = 3x + 2$; d) $f(x) = -3x + 2$.
2) Remdamiesi grafiku, raskite x reikšmes, su kuriomis $f(x) = 0$; $f(x) < 0$; $f(x) \geqslant 0$.

272. Nebrėždami tiesės, apibūdinkite funkciją $y = f(x) = ax + b$, kai:
a) $f(x) = 3x + 6$; b) $f(x) = -4x + 2$; c) $f(x) = -5$.

Apibūdinkime funkciją $y = f(x)$, kai $f(x) = x + 5$.

1) Funkcijos reiškinys $x + 5$ turi prasmę su visomis x reikšmėmis. Vadinasi, funkcijos apibrėžimo sritis yra visi skaičiai, t. y. $x \in (-\infty; +\infty)$.

2) Funkcija yra didėjanti visoje apibrėžimo srityje (x reikšmėms didėjant, atitinkamos y reikšmės didėja), nes koeficientas a yra teigiamas ($1 > 0$). Vadinasi, funkcijos reikšmių sritis yra visi skaičiai, t. y. $y \in (-\infty; +\infty)$.

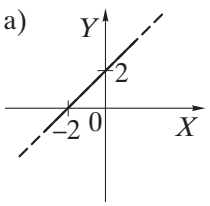
3) $y = 0$, kai $x + 5 = 0$, $\Rightarrow$ $x = -5$;
$y > 0$, kai $x + 5 > 0$, $\Rightarrow$ $x > -5$;
$y < 0$, kai $x + 5 < 0$, $\Rightarrow$ $x < -5$.

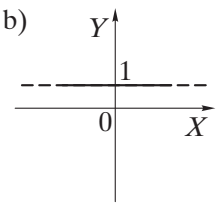
273. 1) Nebrėždami tiesės, raskite x reikšmes, su kuriomis $y = 0$; $y > 0$; $y \leqslant 0$, kai:
a) $y = 2x - 5$; b) $y = \frac{x}{3} + 4$; c) $y = -\frac{x}{2} - 3$.
2) Kiekvienu atveju užrašykite taško, kuriame tiesė kerta OY ašį, koordinates.

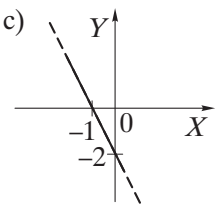
274. Ar tiesė $y = ax + b$ eina per tašką C, jei:
a) $y = 3x + 2$, $C(-1; 1)$? b) $y = -2x + 5$, $C(1; 3)$? c) $y = -4$, $C(4; -4)$?
d) $y = \frac{1}{2}x - 3$, $C(4; -1)$? e) $y = -\frac{x}{3} + 1$, $C(-3; 2)$? f) $y = -3$, $C(-3; 3)$?

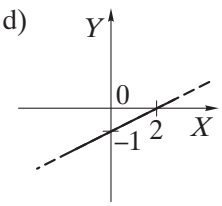
Tiesė $y = x - 2$ eina per tašką $A(3; 1)$, nes kai $x = 3$, tai $y = 3 - 2 = 1$.
Tiesė $y = x - 2$ neina per tašką $B(1; 3)$, nes kai $x = 1$, tai $y = 1 - 2 = -1 \neq 3$.

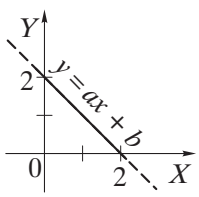
275. Pavaizduota tiesė $y = ax + b$. Raskite a ir b reikšmes ir užrašykite tiesės lygtį.

a) 

b) 

c) 

d) 



1) Tiesė $y = ax + b$ eina per tašką $(2; 0)$, todėl teisinga lygybė $0 = a \cdot 2 + b$, $\Rightarrow$ $2a + b = 0$.
2) Tiesė $y = ax + b$ eina per tašką $(0; 2)$, todėl teisinga lygybė $2 = a \cdot 0 + b$, $\Rightarrow$ $b = 2$.
3) Iš lygybės $2a + b = 0$, kai $b = 2$, gauname $2a + 2 = 0$, $\Rightarrow$ $a = -1$.
4) Tiesės lygtis yra $y = -1 \cdot x + 2 = -x + 2$.

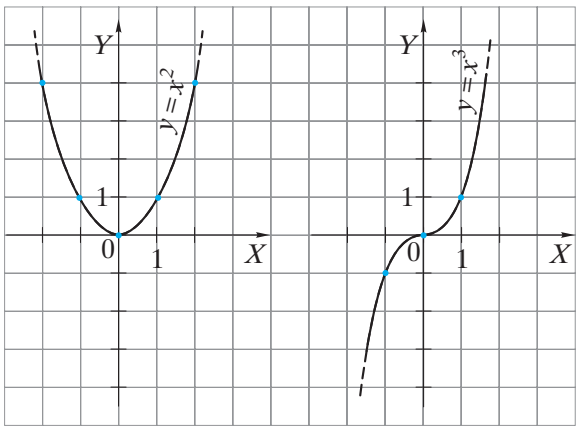
276. 1) Vienoje koordinačių plokštumoje nubrėžkite tieses:
a) $y = x$, $y = x + 2$, $y = x - 3$;
b) $y = -2x$, $y = -2x + 3$, $y = -2x - 1$.
2) Kokios jos yra?
A Lygiagrečios **B** Susikertančios **C** Sutampančios **D** Nustatyti neįmanoma

Tiesės $y = a_1x + b_1$ ir $y = a_2x + b_2$:
- yra lygiagrečios, jei $a_1 = a_2$, o $b_1 \neq b_2$;
- sutampa, jei $a_1 = a_2$ ir $b_1 = b_2$;
- susikerta, jei $a_1 \neq a_2$, o b_1 ir b_2 — bet kokie skaičiai.

3.2. Laipsninės funkcijos

Šiame atverstinyje nagrinėsime funkcijas $y = f(x) = x^n$ $(n \in N,\ n > 1)$ ir jų grafikus.

1 užduotis. Nubraižyti funkcijų $y = f(x) = x^2$ ir $y = g(x) = x^3$ grafikai.



Funkcijos $y = x^3$ grafikas vadinamas *kùbine parãbole*.

Parabolė $y = x^2$ yra simetrinė OY ašies atžvilgiu.
Kubinė parabolė $y = x^3$ yra simetrinė koordinačių pradžios taško O atžvilgiu.

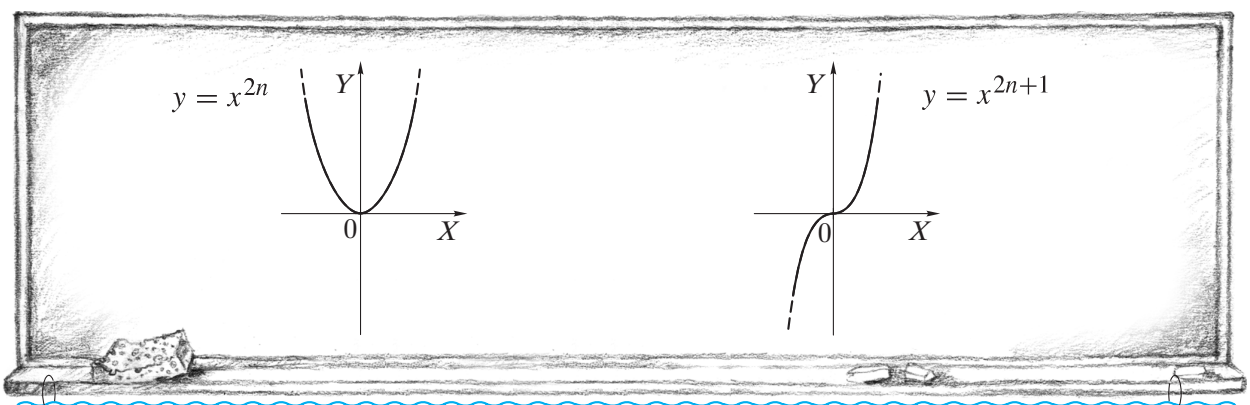
Remdamiesi grafiku, apibūdinkite funkciją: a) $y = f(x) = x^2$; b) $y = g(x) = x^3$.

1) Kokia yra funkcijos apibrėžimo sritis? reikšmių sritis?
2) Su kuriomis x reikšmėmis funkcijos reikšmės yra teigiamos $(y > 0)$? neigiamos $(y < 0)$? lygios nuliui $(y = 0)$?
3) Kuriame x reikšmių intervale funkcijos reikšmės mažėja? didėja?
4) Ar funkcija turi didžiausią (mažiausią) reikšmę? Jei taip, tai kokia ta reikšmė ir su kuria x reikšme ji yra didžiausia (mažiausia)?
5) Ar funkcija yra lyginė, ar nelyginė?

Funkcija $y = f(x)$ vadinama *lýgine*, jei su visomis x reikšmėmis iš apibrėžimo srities $f(-x) = f(x)$. Lyginės funkcijos grafikas yra simetrinis OY ašies atžvilgiu.
Funkcija $y = f(x)$ vadinama *nelýgine*, jei su visomis x reikšmėmis iš apibrėžimo srities $f(-x) = -f(x)$. Nelyginės funkcijos grafikas yra simetrinis koordinačių pradžios taško O atžvilgiu.

2 užduotis.

1) Nubraižykite funkcijos $y = f(x)$ grafiką, kai: a) $f(x) = x^4$; b) $f(x) = x^5$.
2) Remdamiesi juo, apibūdinkite funkciją.



Lyginio laipsnio funkcijos grafikas $y = x^{2n}$ $(n \in N,\ n > 1)$ primena parabolę $y = x^2$.
Nelyginio laipsnio funkcijos grafikas $y = x^{2n+1}$ $(n \in N,\ n > 1)$ primena kubinę parabolę $y = x^3$.

3.2. Uždaviniai

277. Apskaičiuokite.

a) $f(-2)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(3)-f(2)$, $f(1)\cdot f(-1)$, kai $f(x)=x^2$;

b) $f(-1)$, $f\left(1\frac{1}{2}\right)$, $f(-1)+f(1)$, $f(2)\cdot f(1)$, kai $f(x)=x^3$;

c) $f(1)$, $f(-1)$, $f(2)$, $f(2)-f(-1)$, kai $f(x)=x^4$;

d) $f(1)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(0)\cdot f(1)$, kai $f(x)=x^5$.

278. Duotos funkcijos $y=f(x)=x^2$ ir $y=g(x)=x^3$. Palyginkite reikšmes:

a) $f(-2)$ ir $f(2)$; b) $f(-1)$ ir $f(1)$; c) $f(1)$ ir $f(2)$;

d) $g(-2)$ ir $g(2)$; e) $g(-1)$ ir $g(1)$; f) $g(-2)$ ir $g(-1)$;

g) $f(-2)$ ir $g(-2)$; h) $f(-1)$ ir $g(-1)$; i) $f(-2)$ ir $g(2)$.

279. 1) Nubraižykite funkcijos $y=f(x)$ grafiką, kai: a) $f(x)=-x^2$; b) $f(x)=-x^3$.
2) Remdamiesi juo, apibūdinkite funkciją.

280. Nebraižydami funkcijos $y=f(x)$ grafiko, nustatykite, ar funkcija yra lyginė, ar nelyginė, ar nėra nei lyginė, nei nelyginė, kai:

a) $f(x)=x^2+1$; b) $f(x)=-2x^2-2$; c) $f(x)=x^2+2x$;

d) $f(x)=x^3+1$; e) $f(x)=2x^3$; f) $f(x)=-2x^3-2$.

Funkcija $y=f(x)=x^2+4$ yra lyginė, nes $f(-x)=(-x)^2+4=x^2+4=f(x)$.
Funkcija $y=g(x)=-x^3$ yra nelyginė, nes $g(-x)=-(-x)^3=-\left(-x^3\right)=x^3=-g(x)$.
Funkcija $y=h(x)=x^3-1$ nėra nei lyginė, nei nelyginė, nes
$h(-x)=(-x)^3-1=-x^3-1\neq h(x)$ ir $h(-x)\neq -h(x)$.

281. Ar taškas B priklauso funkcijos $y=f(x)$ grafikui, kai:

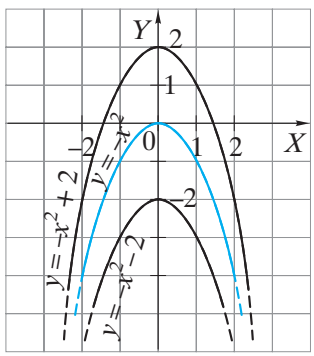
a) $f(x)=x^2$, $B(-1;1)$? b) $f(x)=x^3$, $B(-1;1)$? c) $f(x)=-x^3$, $B(2;-8)$?

282. Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykite grafikus:

a) $y=x^2$, $y=x^2+1$, $y=x^2-4$; b) $y=x^3$, $y=x^3+1$, $y=x^3-1$.

Braižant funkcijos $y=f(x)+a$ (a — skaičius) grafiką, galima nubraižyti funkcijos $y=f(x)$ grafiką, o tada jį pastumti:
- per a vienetų į viršų, jei $a>0$;
- per $|a|$ vienetų į apačią, jei $a<0$.

Grafikai $y=f(x)$ ir $y=f(x)+a$ ($a\neq 0$) bendrų taškų neturi.
Parabolės $y=-x^2+2$, $y=-x^2$, $y=-x^2-2$ nesikerta.

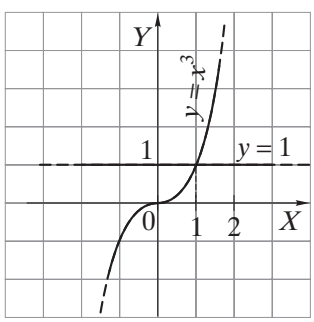


283. Koordinačių plokštumoje nubraižyta kubinė parabolė $y=x^3$ ir tiesė $y=1$.
Remdamiesi brėžiniu, raskite sprendinius:

a) lygties $x^3=1$; b) nelygybės $x^3<1$;

c) nelygybės $x^3\geqslant 1$; d) lygties $x^3=0$;

e) nelygybės $x^3\leqslant 0$; f) nelygybės $x^3>0$.



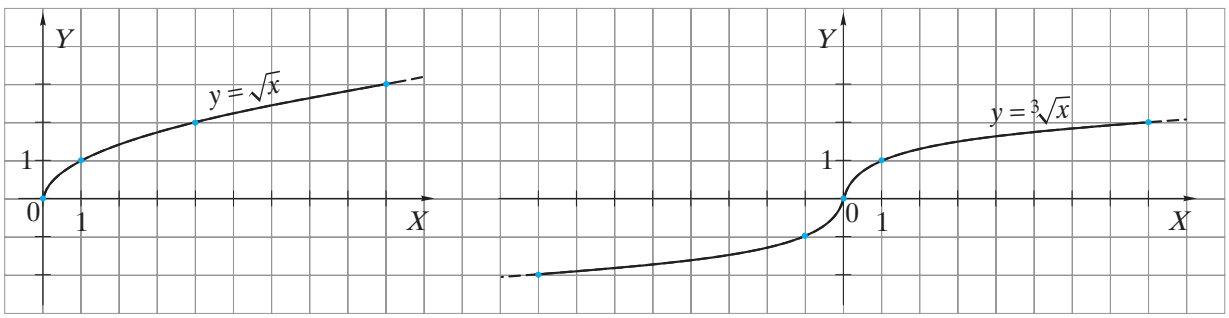
3.3. Šaknies funkcijos

Šiame atverstinyje nagrinėsime funkcijas $y = f(x) = \sqrt[n]{x}$ $(n \in N,\ n > 1)$ ir jų grafikus.

1 užduotis. Sudarytos funkcijų $y = f(x) = \sqrt{x}$ ir $y = g(x) = \sqrt[3]{x}$ kai kurių x ir y reikšmių lentelės ir nubraižyti šių funkcijų grafikai.

$x =$	0	…	1	…	4	…	9	…
$y = \sqrt{x} =$	0		1		2		3	

$x =$	…	−8	…	−1	…	0	…	1	…	8	…
$y = \sqrt[3]{x} =$		−2		−1		0		1		2	

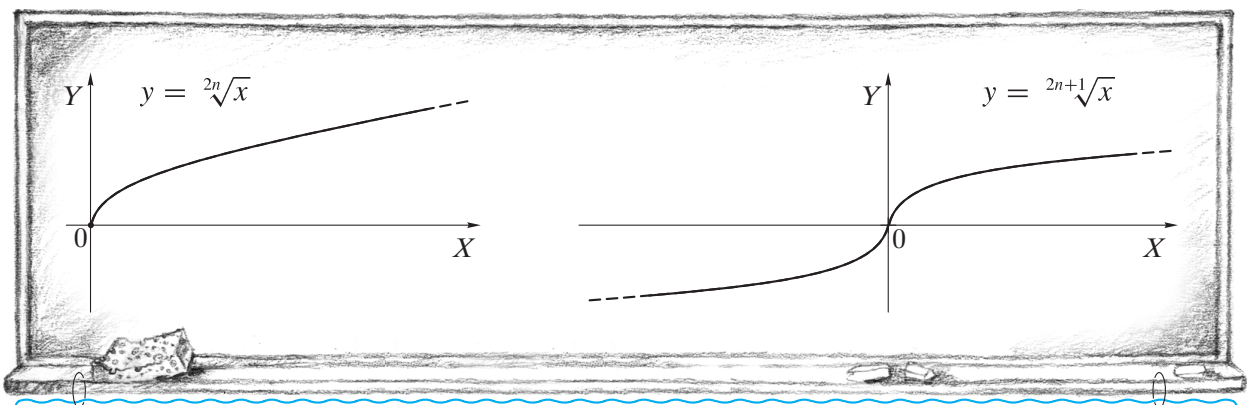


Remdamiesi grafiku, apibūdinkite funkciją: a) $y = f(x) = \sqrt{x}$; b) $y = g(x) = \sqrt[3]{x}$.

1) Kokia yra funkcijos apibrėžimo sritis? reikšmių sritis?
2) Su kuriomis x reikšmėmis funkcijos reikšmės yra teigiamos $(y > 0)$? neigiamos $(y < 0)$? lygios nuliui $(y = 0)$?
3) Kokia yra funkcija — mažėjanti ar didėjanti?
4) Ar funkcija turi didžiausią (mažiausią) reikšmę? Jei taip, tai kokia ta reikšmė ir su kuria x reikšme ji yra didžiausia (mažiausia)?
5) Ar funkcija yra lyginė, ar nelyginė, ar nėra nei lyginė, nei nelyginė?

2 užduotis.

1) Nubraižykite funkcijos $y = f(x)$ grafiką, kai: a) $f(x) = \sqrt[4]{x}$; b) $f(x) = \sqrt[5]{x}$.
2) Remdamiesi juo, apibūdinkite funkciją.



Lyginio laipsnio šaknies funkcijos grafikas $y = \sqrt[2n]{x}$ $(n \in N,\ n > 1)$ primena $y = \sqrt{x}$ grafiką.

Nelyginio laipsnio šaknies funkcijos grafikas $y = \sqrt[2n+1]{x}$ $(n \in N,\ n > 1)$ primena $y = \sqrt[3]{x}$ grafiką.

3.3. Uždaviniai

284. Apskaičiuokite.
a) $f(4)$, $f(1)$, $f(1)-f(0)$, $f(4)\cdot f(9)$, kai $f(x)=\sqrt{x}$;
b) $f(-1)$, $f(8)$, $f(-8)+f(0)$, $f(-1)\cdot f(1)$, kai $f(x)=\sqrt[3]{x}$.

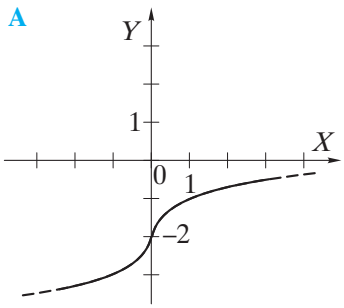
285. Duotos funkcijos $y=f(x)=\sqrt{x}$ ir $y=g(x)=\sqrt[3]{x}$. Palyginkite reikšmes:
a) $f(4)$ ir $f(1)$; b) $f(0)$ ir $f(9)$; c) $g(-1)$ ir $g(1)$;
d) $g(-8)$ ir $g(8)$; e) $f(1)$ ir $g(1)$; f) $f(0)$ ir $g(-27)$.

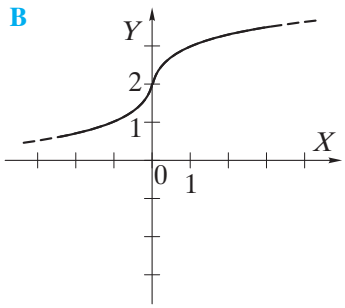
286. 1) Nubraižykite funkcijos $y=f(x)$ grafiką, kai: a) $f(x)=-\sqrt{x}$; b) $f(x)=-\sqrt[3]{x}$.
2) Remdamiesi juo, apibūdinkite funkciją.

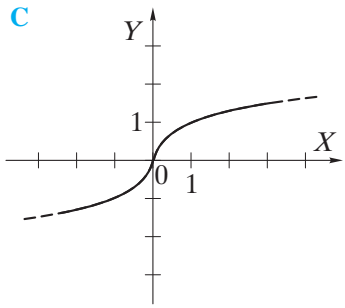
287. Nubraižykite $y=\sqrt{x}$ grafiką. Naudodamiesi juo:
a) OY ašyje apytiksliai atidėkite skaičius $\sqrt{0{,}7}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$;
b) OX ašyje apytiksliai atidėkite x reikšmes, su kuriomis $y=\sqrt{x}$ reikšmės lygios 0,5; 1,5; 2,5;
c) surašykite skaičius $\sqrt{5}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{5{,}1}$; $\sqrt{6{,}2}$ didėjimo tvarka.

288. Naudodamiesi $y=\sqrt[3]{x}$ grafiku, raskite:
a) apytiksles iracionaliųjų skaičių $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[3]{5{,}5}$; $\sqrt[3]{6{,}5}$ reikšmes;
b) apytikslius skaičius, iš kurių ištraukę kubinę šaknį gauname 0,5; 1,5; 1,9;
c) surašykite skaičius $\sqrt[3]{6{,}5}$; $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[3]{3}$; $\sqrt[3]{7}$ mažėjimo tvarka.

289. Nubraižyti $y=\sqrt[3]{x}$, $y=\sqrt[3]{x}+2$ ir $y=\sqrt[3]{x}-2$ grafikai. Kuris grafikas kuriame paveikslėlyje pavaizduotas?

A


B


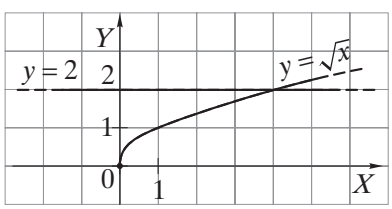
C


290. Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykite grafikus:
a) $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{x}+4$, $y=\sqrt{x}-4$; b) $y=\sqrt[3]{x}$, $y=\sqrt[3]{x}+3$, $y=\sqrt[3]{x}-3$.

291. Ar taškas A priklauso funkcijos $y=f(x)$ grafikui, kai:
a) $f(x)=\sqrt{x}+2$, $A(9;5)$? b) $f(x)=-\sqrt{x}-3$, $A(4;5)$?
c) $f(x)=\sqrt[3]{x}-1$, $A(8;1)$? d) $f(x)=-\sqrt[3]{x}-2$, $A(8;0)$?

Taškas $B(4;-1)$ priklauso funkcijos $y=f(x)=\sqrt{x}-3$ grafikui, nes
$f(4)=\sqrt{4}-3=2-3=-1$.
Taškas $C(-8;1)$ nepriklauso funkcijos $y=f(x)=\sqrt[3]{x}+1$ grafikui, nes
$f(-8)=\sqrt[3]{-8}+1=-2+1=-1\neq 1$.

292. Koordinačių plokštumoje nubraižyti $y=\sqrt{x}$ ir $y=2$ grafikai. Remdamiesi brėžiniu, raskite sprendinius:
a) lygties $\sqrt{x}=2$; b) nelygybės $\sqrt{x}<2$;
c) nelygybės $\sqrt{x}\geqslant 2$; d) lygties $\sqrt{x}=0$.

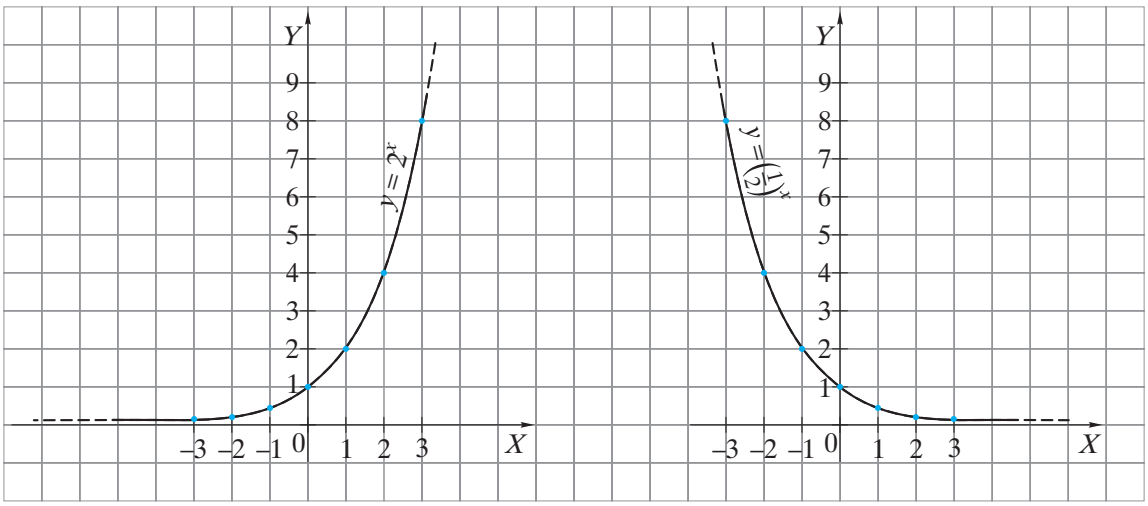


3.4. Rodiklinės funkcijos

Šiame atverstinyje nagrinėsime funkcijas $y = f(x) = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ ir jų grafikus.

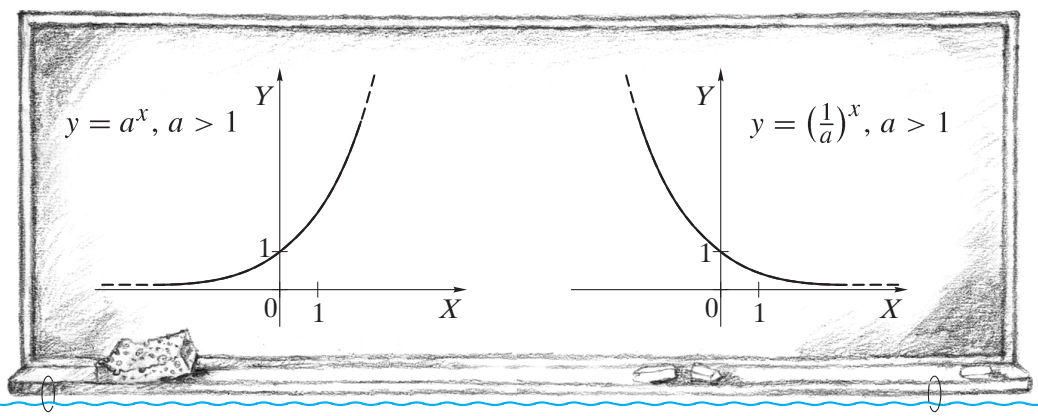
Užduotis. Sudarytos funkcijų $y = f(x) = 2^x$ ir $y = g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ kai kurių x ir y reikšmių lentelės ir nubraižyti funkcijų grafikai.

$x =$	…	-3	…	-2	…	-1	…	0	…	1	…	2	…	3	…
$y = 2^x =$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		1		2		4		8	
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x =$		8		4		2		1		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{8}$	



Remdamiesi grafiku, apibūdinkite funkciją: a) $y = f(x) = 2^x$; b) $y = g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

1) Kokia yra funkcijos apibrėžimo sritis?
2) Kuriame taške funkcijos grafikas kerta OY ašį?
3) Ar funkcijos grafikas kerta OX ašį? Kokia yra funkcijos reikšmių sritis?
4) Su kuriomis x reikšmėmis funkcijos reikšmės yra teigiamos $(y > 0)$? Ar yra x reikšmių, su kuriomis funkcijos reikšmės yra neigiamos $(y < 0)$? lygios nuliui $(y = 0)$?
5) Kokia yra funkcija — didėjanti ar mažėjanti?
6) Ar funkcija yra lygine, ar nelygine, ar nėra nei lygine, nei nelygine?



Kreivės $y = a^x$ ir $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, čia $a > 0$, $a \neq 1$, yra simetrinės viena kitai OY ašies atžvilgiu.

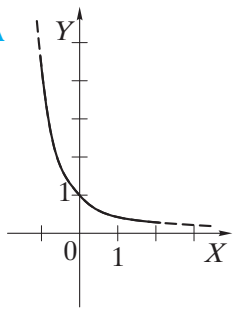
3.4. Uždaviniai

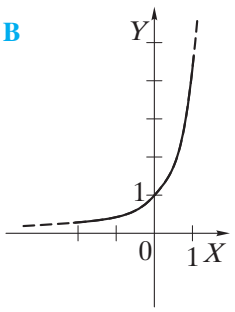
293. 1) Dideliame popieriaus lape vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykite funkcijų $y = f(x) = 2^x$ ir $y = g(x) = 3^x$ grafikus.
2) Juose pažymėkite taškus $(x; 2^x)$ ir $(x; 3^x)$, kai $x = -2$; $x = -1$; $x = 0$; $x = 2$.
3) Remdamiesi grafikais, palyginkite skaičius, parašydami ženklą $>$, $<$ arba $=$.
a) 2^{-2} ir 3^{-2}; b) 2^{-1} ir 3^{-1}; c) 2^0 ir 3^0; d) 2^2 ir 3^2;
e) 2^x ir 3^x, kai $x \in (0; +\infty)$; f) 2^x ir 3^x, kai $x \in (-\infty; 0)$.
4) Surašykite didėjimo tvarka skaičius:
2^5; 2^{15}; 2^{-8}; 2^{-3}; 2^0.
5) Surašykite mažėjimo tvarka skaičius:
3^5; 3^{15}; 3^{-8}; 3^{-3}; 3^0.

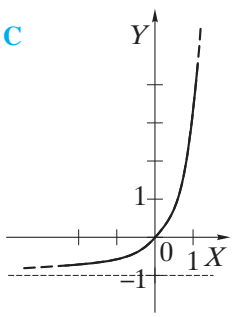
294. 1) Dideliame popieriaus lape vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykite funkcijų $y = f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ir $y = g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ grafikus.
2) Juose pažymėkite taškus $\left(x; \left(\frac{1}{2}\right)^x\right)$ ir $\left(x; \left(\frac{1}{3}\right)^x\right)$, kai $x = -2$; $x = -1$; $x = 0$; $x = 2$.
3) Remdamiesi grafikais, palyginkite skaičius, parašydami ženklą $>$, $<$ arba $=$.
a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ ir $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$; b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ ir $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$; c) $\left(\frac{1}{2}\right)^0$ ir $\left(\frac{1}{3}\right)^0$; d) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ ir $\left(\frac{1}{3}\right)^2$;
e) $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ir $\left(\frac{1}{3}\right)^x$, kai $x \in (0; +\infty)$; f) $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ir $\left(\frac{1}{3}\right)^x$, kai $x \in (-\infty; 0)$.
4) Surašykite mažėjimo tvarka skaičius:
$\left(\frac{1}{2}\right)^5$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{15}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-8}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^0$.
5) Surašykite didėjimo tvarka skaičius:
$\left(\frac{1}{3}\right)^5$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{15}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{-8}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^0$.

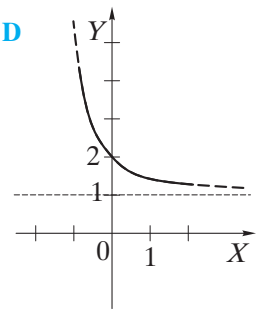
295. Ar funkcijos $y = f(x)$ grafikas eina per tašką M, kai:
a) $f(x) = 3^x$, $M(-4; 81)$?
b) $f(x) = 3^x$, $M\left(-2; \frac{1}{9}\right)$?
c) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $M(-4; 81)$?
d) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $M\left(-2; \frac{1}{9}\right)$?

296. Nubraižyti $y = 4^x$, $y = 4^x - 1$, $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ ir $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x + 1$ grafikai. Kuris grafikas kuriame paveikslėlyje pavaizduotas?

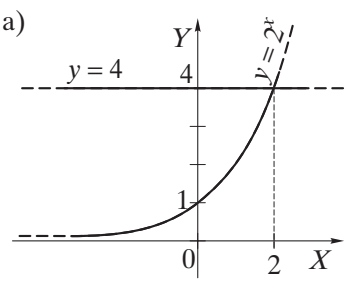
A 

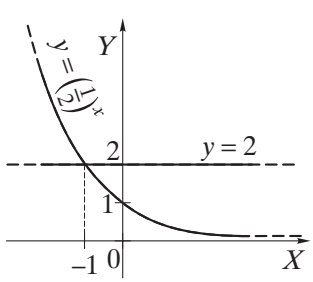
B 

C 

D 

297. Mokinys lygtį $a^x = b$ sprendė braižydamas $y = a^x$ ir $y = b$ grafikus.

a) 

b) 

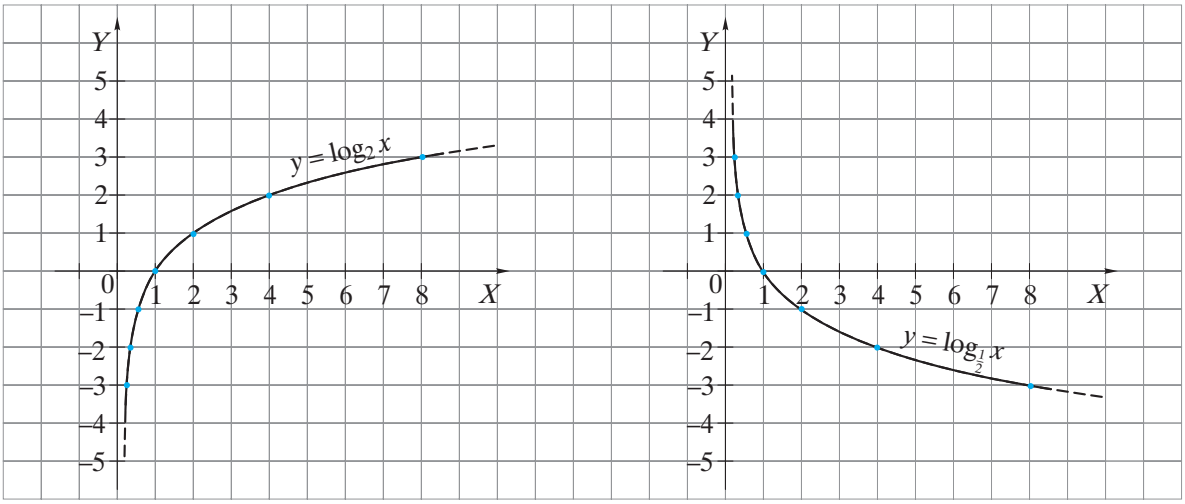
1) Kokią lygtį sprendė mokinys? 2) Koks yra spręstos lygties atsakymas?

3.5. Logaritminės funkcijos

Šiame atverstinyje nagrinėsime funkcijas $y = f(x) = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ ir jų grafikus.

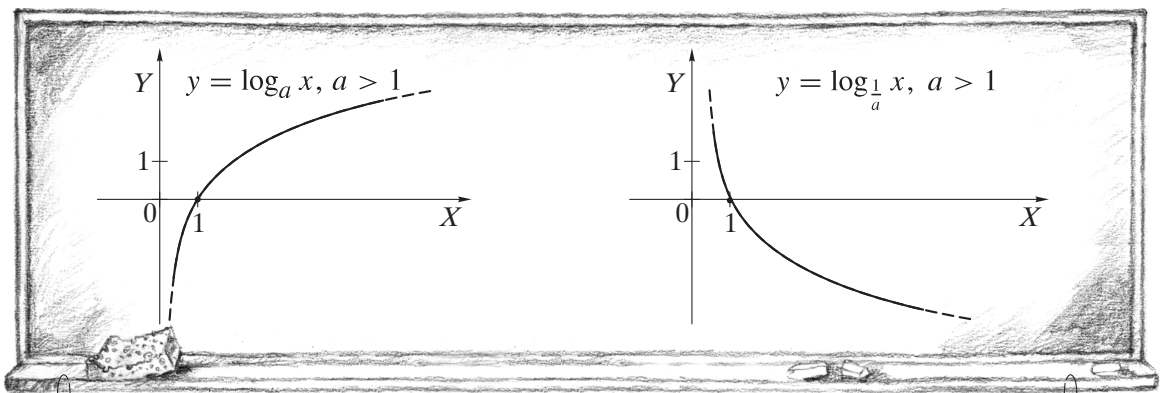
Užduotis. Sudarytos funkcijų $y = f(x) = \log_2 x$ ir $y = g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ kai kurių x ir y reikšmių lentelės ir nubraižyti funkcijų grafikai.

$x =$	…	$\frac{1}{8}$	…	$\frac{1}{4}$	…	$\frac{1}{2}$	…	1	…	2	…	4	…	8	…
$y = \log_2 x =$		-3		-2		-1		0		1		2		3	
$y = \log_{\frac{1}{2}} x =$		3		2		1		0		-1		-2		-3	



Remdamiesi grafiku, apibūdinkite funkciją: a) $y = f(x) = \log_2 x$; b) $y = g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

1) Ar grafikas kerta OY ašį? Kokia yra funkcijos apibrėžimo sritis?
2) Kokia yra funkcijos reikšmių sritis?
3) Kuriame taške funkcijos grafikas kerta OX ašį?
4) Su kuriomis x reikšmėmis funkcijos reikšmės yra teigiamos $(y > 0)$? neigiamos $(y < 0)$? Ar yra x reikšmių, su kuriomis funkcijos reikšmės yra lygios nuliui $(y = 0)$?
5) Kokia yra funkcija — didėjanti ar mažėjanti?
6) Ar funkcija yra lyginė, ar nelyginė, ar nėra nei lyginė, nei nelyginė?



Kreivės $y = \log_a x$ ir $y = \log_{\frac{1}{a}} x$, čia $a > 0,\ a \neq 1$ yra simetrinės viena kitai OX ašies atžvilgiu.

3.5. Uždaviniai

298. Nubraižykite funkcijos $y = f(x)$ grafiką ir apibūdinkite funkciją, kai:
a) $f(x) = \log_3 x$; b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$.

299. a) Remdamiesi funkcijos $y = f(x) = \log_2 x$ grafiku, didėjimo tvarka surašykite skaičius:

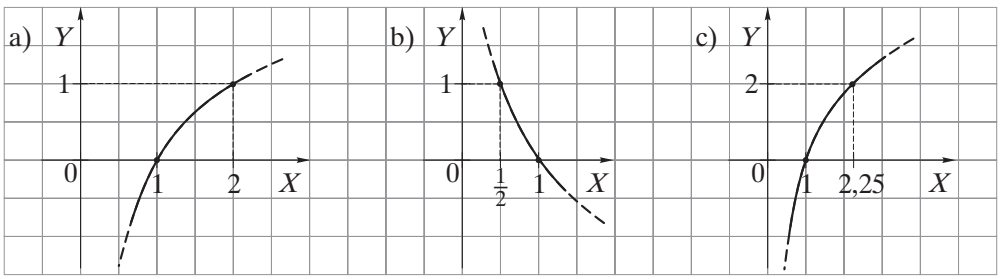
$\log_2 \frac{1}{64}$, $\log_2 64$, $\log_2 \frac{1}{8}$, $\log_2 8$, $\log_2 \frac{1}{3}$, $\log_2 \frac{1}{5}$, $\log_2 3$, $\log_2 5$.

b) Remdamiesi funkcijos $y = f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ grafiku, didėjimo tvarka surašykite skaičius:

$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{64}$, $\log_{\frac{1}{2}} 64$, $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$, $\log_{\frac{1}{2}} 8$, $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$, $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{5}$, $\log_{\frac{1}{2}} 3$, $\log_{\frac{1}{2}} 5$.

300. Kurie iš taškų $A(0{,}1; -1)$, $B(100; 2)$, $C(2; 100)$, $D(10; -1)$, $E(1000; -3)$ ir $F(1; 0)$ priklauso funkcijos $y = f(x)$ grafikui, jei:
a) $f(x) = \lg x$? b) $f(x) = \log_{0,1} x$?

301. Remdamiesi $y = \log_a x$ grafiku, nustatykite logaritmo pagrindo a reikšmę.

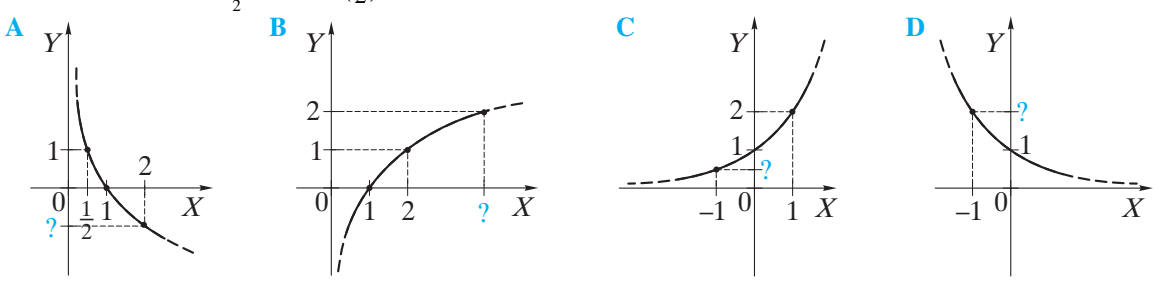


302. Raskite funkcijos $y = f(x)$ apibrėžimo sritį, kai:
a) $f(x) = \log_2(x + 5)$; b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(5 - x)$; c) $f(x) = \log_3(2x - 10)$;
d) $f(x) = \log_4(x^2)$; e) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}}(x^2 + 1)$; f) $f(x) = \lg\sqrt{x - 2}$.

Po logaritmu esantis reiškinys gali įgyti tik didesnes už 0 reikšmes.

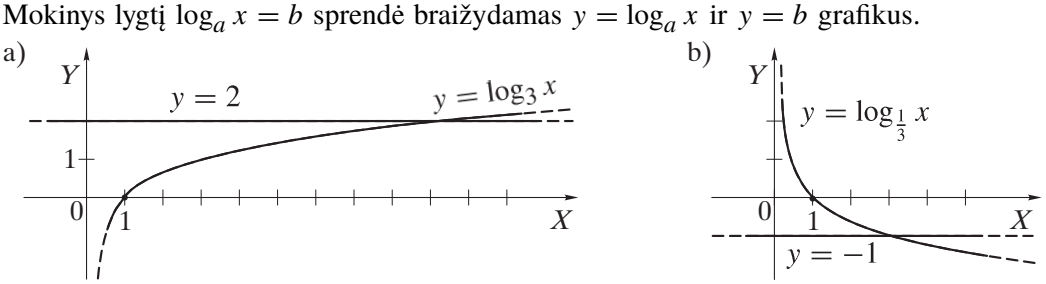
Reiškinys $\log_2(3x - 9)$ turi prasmę, kai $3x - 9 > 0$, $\Rightarrow$ $x > 3$.

303. Nubraižyti $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = \log_2 x$ ir $y = 2^x$ grafikai.



1) Kuris grafikas kuriame paveikslėlyje pavaizduotas?
2) Kokie skaičiai turėtų būti parašyti vietoj klaustukų?

304. Mokinys lygtį $\log_a x = b$ sprendė braižydamas $y = \log_a x$ ir $y = b$ grafikus.

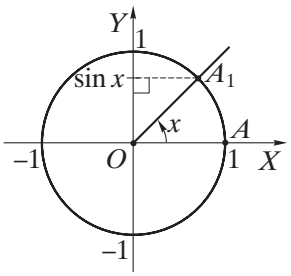


Remdamiesi grafikais, nustatykite, kokią lygtį sprendė mokinys ir koks yra jos sprendinys.

3.6. Sinuso funkcija

Šiame atverstinyje susipažinsime su funkcija $y = f(x) = \sin x$ ir jos grafiku.

Nagrinėkime funkciją $y = f(x) = \sin x$, čia x yra posūkio kampas laipsniais.



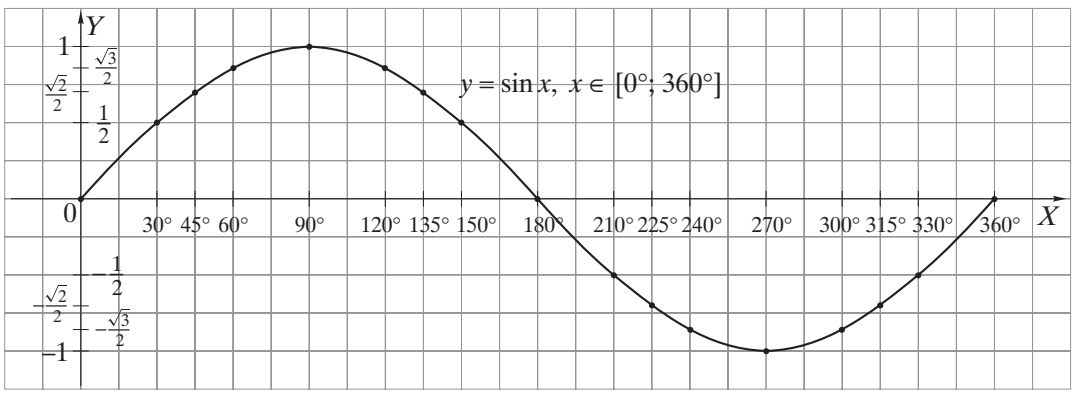
Sinuso funkcijos:
- apibrėžimo sritis (laipsniais) yra intervalas $(-\infty; +\infty)$;
- reikšmių sritis yra intervalas $[-1; 1]$;
- reikšmės periodiškai kartojasi kas 360°.

Sudarykime funkcijos $y = f(x) = \sin x$ kai kurių reikšmių lentelę, kai $x \in [0°; 360°]$.

x (laipsniais) =	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$y = \sin x =$	0	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}71$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}87$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

x (laipsniais) =	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$y = \sin x =$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

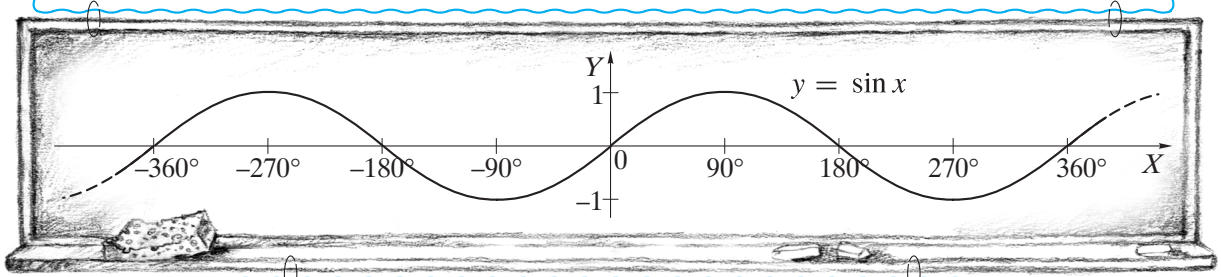
Naudodamiesi šiomis reikšmėmis, nubraižykime funkcijos grafiką intervale $[0°; 360°]$.



Užduotis.

1) Remdamiesi grafiku, užrašykite:
   a) x reikšmes, su kuriomis funkcijos $y = f(x) = \sin x$, kai $x \in [0°; 360°]$, reikšmės yra teigiamos $(y > 0)$; neigiamos $(y < 0)$; lygios nuliui $(y = 0)$;
   b) x reikšmes, su kuriomis funkcijos $y = f(x) = \sin x$, kai $x \in [0°; 360°]$, reikšmės didėja; mažėja.
2) Nubraižykite funkcijos $y = f(x) = \sin x$ grafiką intervale $[-360°; 0°]$.
3) Kas kiek laipsnių $\sin x$ įgyja tas pačias reikšmes? Pabaikite lygybę $\sin(x + 360°) = \ldots$.

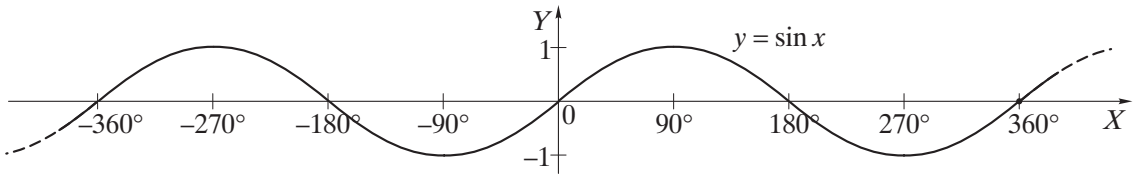
Sakoma, kad sinuso funkcija yra *periòdinė*. Jos mažiausias teigiamas periodas yra 360°.



Funkcijos $y = f(x) = \sin x$ grafikas vadinamas *sinusoide*.

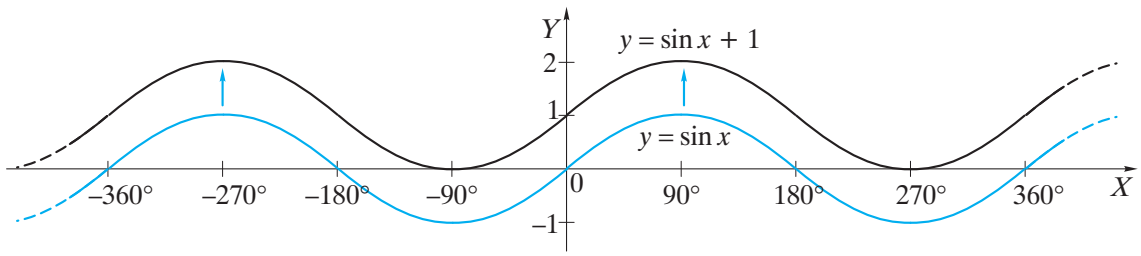
3.6. Uždaviniai

305. 1) Remdamiesi sinuso grafiku, nurodykite funkcijos $y = f(x) = \sin x$:
a) apibrėžimo sritį; b) reikšmių sritį.



2) Nurodykite funkcijos $y = f(x) = \sin x$ visas x reikšmes, su kuriomis:
$f(x) = 0$; $f(x) = 1$; $f(x) = -1$.
3) Parašykite intervalus, kuriuose funkcijos $y = f(x) = \sin x$ reikšmės didėja; mažėja.
4) Ar $y = \sin x$ grafikas:
a) yra simetrinis koordinačių pradžios taško $(0; 0)$ atžvilgiu? ordinačių ašies OY atžvilgiu?
b) turi simetrijos centrą? simetrijos ašį?
5) Ar teisinga lygybė $\sin(-x) = -\sin x$?
6) Ar funkcija $y = f(x) = \sin x$ yra lyginė, ar nelyginė, ar nėra nei lyginė, nei nelyginė?
7) Ar funkcija $y = f(x) = \sin x$ yra periodinė, ar nėra periodinė?

306. Nubraižytas $y = \sin x + 1$ grafikas. Jį galima gauti pastūmus $y = \sin x$ grafiką OY ašies kryptimi per 1 vienetą *aukštyn*.

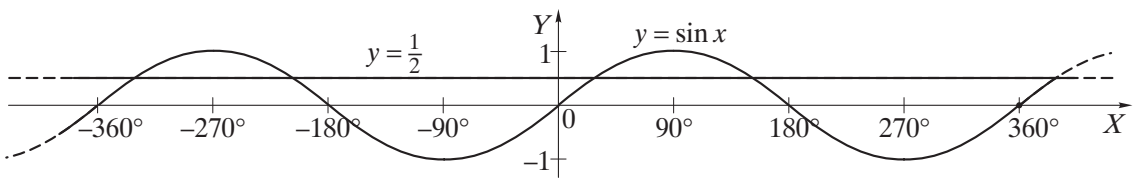


1) Nubraižykite grafiką $y = \sin x - 1$.
2) Paaiškinkite, kaip, remiantis $y = \sin x$ grafiku, galima nubraižyti $y = \sin x + a$, čia a — skaičius, grafiką.
3) Apibūdinkite funkciją $y = f(x) = \sin x - 1$.

Nustatykime funkcijos $y = f(x)$, kai $f(x) = \sin x + 1$, reikšmių sritį.
Kadangi $y = \sin x$ įgyja intervalo $[-1; 1]$ reikšmes, tai funkcijos $y = f(x) = \sin x + 1$ reikšmės yra vienetu didesnės už atitinkamas $y = \sin x$ reikšmes.
Mažiausia funkcijos $y = f(x) = \sin x + 1$ reikšmė lygi $-1 + 1 = 0$, didžiausia reikšmė lygi $1 + 1 = 2$, o reikšmių sritis — intervalas $[0; 2]$.

307. 1) Kokią didžiausią ir kokią mažiausią reikšmes įgyja funkcija $y = f(x)$, kai:
a) $f(x) = 4 + \sin x$? b) $f(x) = \sin x - 1$? c) $f(x) = 2\sin x$?
2) Užrašykite funkcijos $y = f(x)$ reikšmių sritį.

308. Koordinačių plokštumoje nubraižyti $y = \sin x$ ir $y = \frac{1}{2}$ grafikai.



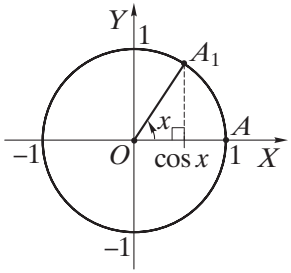
Remdamiesi jais, užrašykite lygties $\sin x = \frac{1}{2}$ sprendinius, priklausančius intervalui $[-360°; 360°]$.

309. Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykite $y = \sin x$ ir $y = -2$ grafikus. Ar lygtis $\sin x = -2$ turi sprendinių?

3.7. Kosinuso funkcija

Šiame atverstinyje susipažinsime su funkcija $y = f(x) = \cos x$ ir jos grafiku.

Nagrinėkime funkciją $y = f(x) = \cos x$, čia x yra posūkio kampas laipsniais.



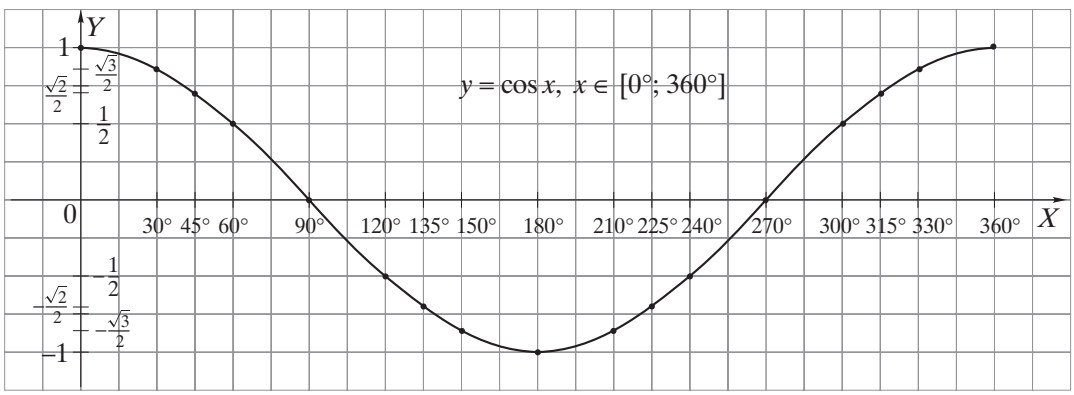
Kosinuso funkcijos:
- apibrėžimo sritis (laipsniais) yra intervalas $(-\infty; +\infty)$;
- reikšmių sritis yra intervalas $[-1; 1]$;
- reikšmės periodiškai kartojasi kas 360°.

Sudarykime funkcijos $y = f(x) = \cos x$ kai kurių reikšmių lentelę, kai $x \in [0°; 360°]$.

x (laipsniais) =	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$y = \cos x$ =	1	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}87$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}71$	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−1

x (laipsniais) =	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$y = \cos x$ =	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

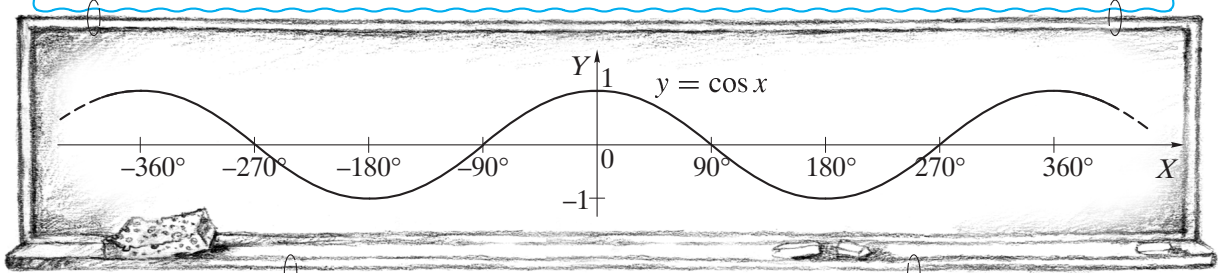
Naudodamiesi šiomis reikšmėmis, nubraižykime funkcijos grafiką intervale $[0°; 360°]$.



Užduotis.

1) Remdamiesi grafiku, užrašykite:
   a) x reikšmes, su kuriomis funkcijos $y = f(x) = \cos x$, kai $x \in [0°; 360°]$, reikšmės yra teigiamos $(y > 0)$; neigiamos $(y < 0)$; lygios nuliui $(y = 0)$;
   b) x reikšmes, su kuriomis funkcijos $y = f(x) = \cos x$, kai $x \in [0°; 360°]$, reikšmės didėja; mažėja.
2) Nubraižykite funkcijos $y = \cos x$ grafiką intervale $[-360°; 0°]$.
3) Kas kiek laipsnių $\cos x$ įgyja tas pačias reikšmes? Pabaikite lygybę $\cos(x + 360°) = \ldots$.

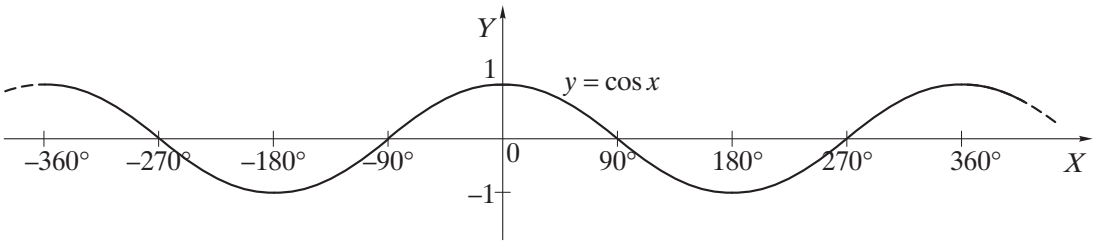
Sakoma, kad kosinuso funkcija yra *periòdinė*. Jos mažiausias teigiamas periodas yra 360°.



Funkcijos $y = f(x) = \cos x$ grafikas vadinamas *kosinusòide*.

3.7. Uždaviniai

310. 1) Remdamiesi kosinuso grafiku, nurodykite funkcijos $y = f(x) = \cos x$:
a) apibrėžimo sritį; b) reikšmių sritį;



2) Nurodykite funkcijos $y = f(x) = \cos x$ visas x reikšmes, su kuriomis:
$f(x) = 0$; $f(x) = 1$; $f(x) = -1$.
3) Parašykite intervalus, kuriuose funkcijos $y = f(x) = \cos x$ reikšmės didėja; mažėja.
4) Ar $y = \cos x$ grafikas:
a) yra simetrinis koordinačių pradžios taško $(0; 0)$ atžvilgiu? ordinačių ašies OY atžvilgiu?
b) turi simetrijos centrą? simetrijos ašį?
5) Ar teisinga lygybė $\cos(-x) = \cos x$?
6) Ar funkcija $y = f(x) = \cos x$ yra lyginė, ar nelyginė, ar nėra nei lyginė, nei nelyginė?
7) Ar funkcija $y = f(x) = \cos x$ yra periodinė, ar nėra periodinė?

311. 1) Nubraižykite $y = \cos x$ grafiką.
2) Paaiškinkite, kaip, remiantis $y = \cos x$ grafiku, galima nubraižyti grafiką:
a) $y = \cos x + 1$; b) $y = \cos x - 2$.
3) Remdamiesi $y = \cos x$ grafiku, nubraižykite grafiką:
a) $y = \cos x + 1$; b) $y = \cos x - 2$.
4) Apibūdinkite 3) punkte nubraižytus grafikus atitinkančias funkcijas.

312. 1) Kokią didžiausią ir kokią mažiausią reikšmes įgyja funkcija $y = f(x)$, kai:
a) $f(x) = 3 + \cos x$? b) $f(x) = \cos x - 4$? c) $f(x) = -2\cos x$?
2) Užrašykite funkcijos $y = f(x)$ reikšmių sritį.

313. Surašykite didėjimo tvarka skaičius:

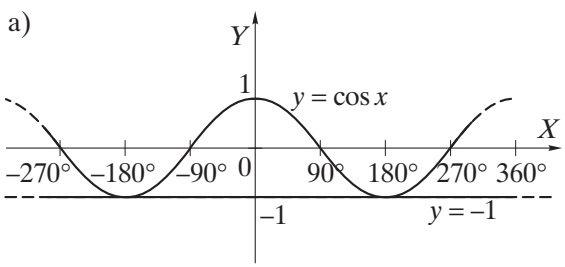
a) $\cos 10°$; $\cos 170°$; $\cos 40°$; $\cos 150°$; $\cos 90°$;

b) $\cos(-20°)$; $\cos(-180°)$; $\cos(-90°)$; $\cos(-80°)$; $\cos(-110°)$;

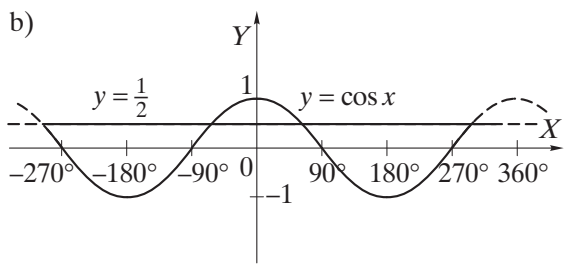
c) $\cos 180°$; $\cos 0°$; $\cos(-40°)$; $\cos(-100°)$; $\cos 120°$.

314. Mokinys lygtį $\cos x = a$ sprendė braižydamas $y = \cos x$ ir $y = a$ grafikus.

a)



b)



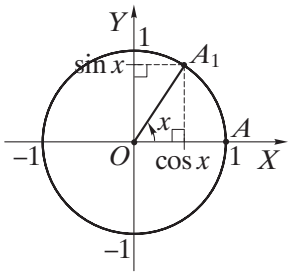
1) Kokią lygtį sprendė mokinys?
2) Raskite tos lygties sprendinius intervale $[-360°; 360°]$.

315. Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykite $y = \cos x$ ir $y = 2$ grafikus. Ar lygtis $\cos x = 2$ turi sprendinių?

3.8. Tangento funkcija

Šiame atverstinyje susipažinsime su funkcija $y = f(x) = \operatorname{tg} x$ ir jos grafiku.

Nagrinėkime funkciją $y = f(x) = \operatorname{tg} x$, čia x yra posūkio kampas laipsniais.



$y = f(x) = \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ neturi prasmės, kai $\cos x = 0$, t. y. kai $x = \pm 90°, \pm 270°, \ldots$.

Vadinasi, tangento funkcijos apibrėžimo sritį sudaro visos x reikšmės, išskyrus $\pm 90°, \pm 270°, \pm 450°, \ldots$.

Tangento funkcijos reikšmių sritis yra visi skaičiai.

Tangento funkcijos reikšmės periodiškai kartojasi kas 180°.

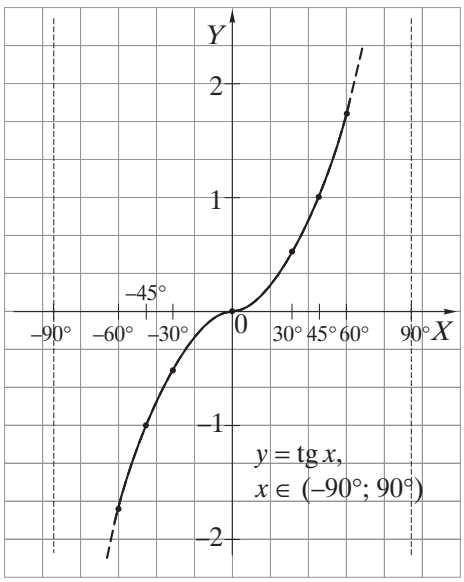
Sudarykime funkcijos $y = f(x) = \operatorname{tg} x$ kai kurių reikšmių lentelę, kai $x \in (-90°; 90°)$, ir nubraižykime jos grafiką intervale $(-90°; 90°)$.

x (laipsniais) =	$-60°$	$-45°$	$-30°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$
$y = \operatorname{tg} x =$	$-\sqrt{3} \approx -1{,}73$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3} \approx -0{,}58$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}58$	1	$\sqrt{3} \approx 1{,}73$

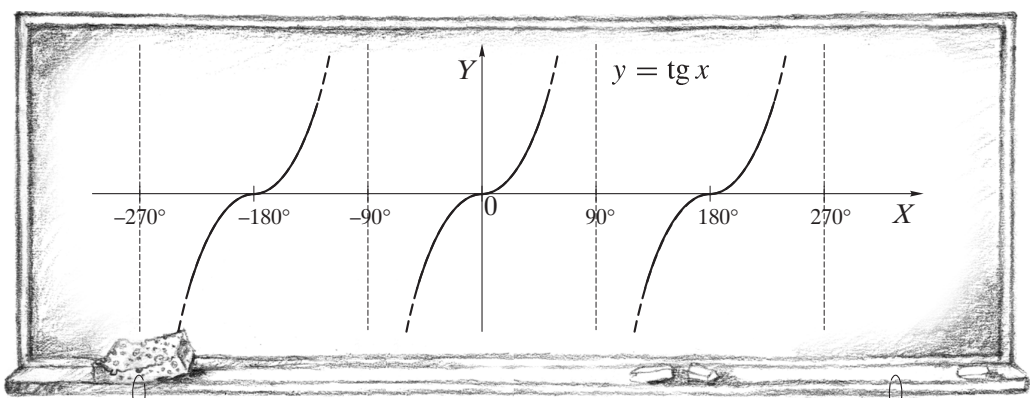
Užduotis.

1) Remdamiesi grafiku, užrašykite:
   a) x reikšmes, su kuriomis funkcijos $y = f(x) = \operatorname{tg} x$, kai $x \in (-90°; 90°)$, reikšmės yra teigiamos ($y > 0$); neigiamos ($y < 0$); lygios nuliui ($y = 0$);
   b) x reikšmes, su kuriomis funkcijos $y = f(x) = \operatorname{tg} x$, kai $x \in (-90°; 90°)$, reikšmės didėja; mažėja.
2) Nubraižykite funkcijos $y = f(x) = \operatorname{tg} x$ grafiką, kai:
   a) $x \in (90°; 270°)$; b) $x \in (-270°; -90°)$.
3) Kas kiek laipsnių $\operatorname{tg} x$ įgyja tas pačias reikšmes? Pabaikite lygybę

$$\operatorname{tg}(x + 180°) = \ldots .$$



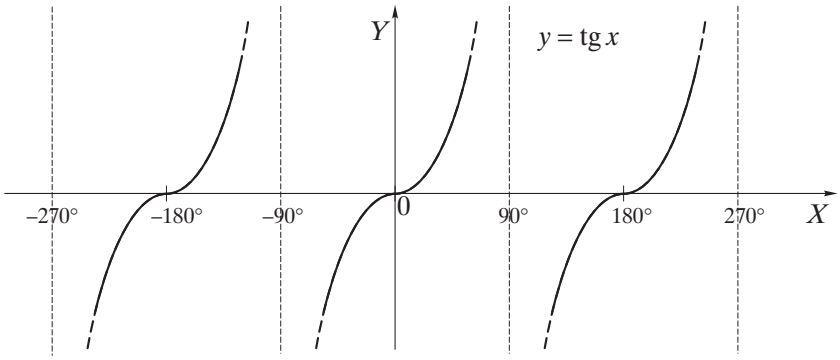
Sakoma, kad tangento funkcija yra *periòdinė*. Jos mažiausias teigiamas periodas yra 180°.



Funkcijos $y = f(x) = \operatorname{tg} x$ grafikas vadinamas *tangentòide*.

3.8. Uždaviniai

316. 1) Remdamiesi tangento grafiku, nurodykite funkcijos $y = f(x) = \operatorname{tg} x$:
a) apibrėžimo sritį; b) reikšmių sritį.



2) Nurodykite funkcijos $y = f(x) = \operatorname{tg} x$ visas x reikšmes, su kuriomis $f(x) = 0$.
3) Parašykite intervalus, kuriuose funkcijos $y = f(x) = \operatorname{tg} x$ reikšmės didėja (mažėja).
4) Ar $y = \operatorname{tg} x$ grafikas:
a) yra simetrinis koordinačių pradžios taško $(0; 0)$ atžvilgiu? ordinačių ašies OY atžvilgiu?
b) turi simetrijos centrą? simetrijos ašį?
5) Ar teisinga lygybė $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$?
6) Ar funkcija $y = f(x) = \operatorname{tg} x$ yra lyginė, ar nelyginė, ar nėra nei lyginė, nei nelyginė?
7) Ar funkcija $y = f(x) = \operatorname{tg} x$ yra periodinė, ar nėra periodinė?

317. Surašykite mažėjimo tvarka skaičius:

a) $\operatorname{tg} 0°$; $\operatorname{tg} 60°$; $\operatorname{tg} 20°$; $\operatorname{tg} 80°$; $\operatorname{tg} 83°$;

b) $\operatorname{tg}(-60°)$; $\operatorname{tg}(-75°)$; $\operatorname{tg} 0°$; $\operatorname{tg}(-15°)$; $\operatorname{tg}(-40°)$;

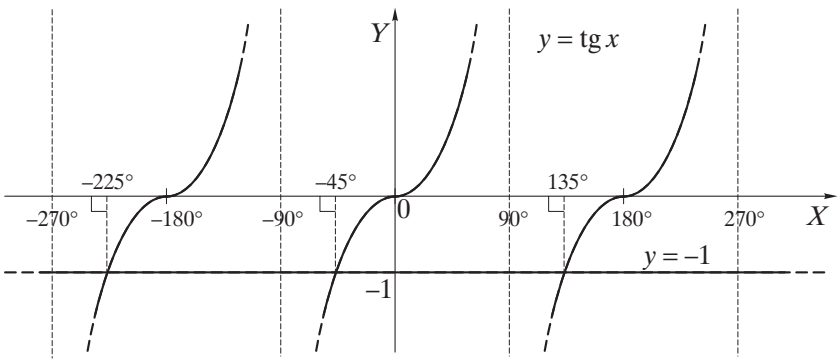
c) $\operatorname{tg}(-45°)$; $\operatorname{tg} 45°$; $\operatorname{tg}(-60°)$; $\operatorname{tg} 30°$; $\operatorname{tg}(-30°)$.

318. 1) Remdamiesi $y = \operatorname{tg} x$ grafiku, nubraižykite grafiką:

a) $y = \operatorname{tg} x + 2$, kai $x \in (-90°; 90°)$; b) $y = \operatorname{tg} x - 3$, kai $x \in (90°; 270°)$.

2) Nurodykite 1) punkte nubraižytus grafikus atitinkančių funkcijų apibrėžimo ir reikšmių sritis.

319. Mokinys lygtį $\operatorname{tg} x = a$ sprendė braižydamas $y = \operatorname{tg} x$ ir $y = a$ grafikus.



1) Kokią lygtį sprendė mokinys?
2) Užrašykite jos sprendinius intervale $(-90°; 90°)$; $(-270°; 270°)$.

320. Raskite didžiausią ir mažiausią funkcijos $y = f(x) = \operatorname{tg} x$ reikšmes intervale:

a) $[0°; 45°]$; b) $[30°; 60°]$; c) $[-45°; 30°]$.

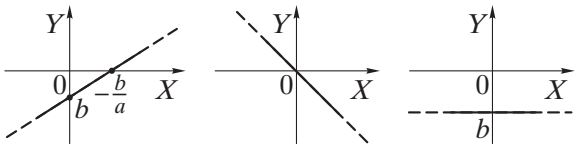
Tiesinės funkcijos

Funkcija $y = f(x) = ax + b$, čia a ir b — skaičiai, vadinama *tiesinė fùnkcija*.

Tiesẽ $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ ašį OY kerta taške $(0; b)$, o ašį OX — taške $\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$.

Tiesinė funkcija $y = f(x) = ax + b$ visoje apibrėžimo srityje yra:

- didėjanti, kai $a > 0$;
- mažėjanti, kai $a < 0$;
- pastovi, kai $a = 0$.



Laipsninės funkcijos. Lyginės ir nelyginės funkcijos

Funkcija $y = f(x) = x^n$, čia $n \in \boldsymbol{N}$, $n > 1$, vadinama *láipsnine fùnkcija*.

Funkcija $y = f(x)$ vadinama:

- *lýgine*, jei su visais x iš apibrėžimo srities yra teisinga lygybė $f(-x) = f(x)$;
- *nelýgine*, jei su visais x iš apibrėžimo srities yra teisinga lygybė $f(-x) = -f(x)$.

Funkcijos $y = f(x) = x^{2n}$, $n \in \boldsymbol{N}$, yra lyginės. Jų:

- apibrėžimo sritis yra intervalas $(-\infty; +\infty)$;
- reikšmių sritis yra intervalas $[0; +\infty)$;

Funkcijos $y = f(x) = x^{2n+1}$, $n \in \boldsymbol{N}$, yra nelyginės. Jų:

- apibrėžimo sritis yra intervalas $(-\infty; +\infty)$;
- reikšmių sritis yra intervalas $(-\infty; +\infty)$.

Šaknies funkcijos

Funkcija $y = f(x) = \sqrt[n]{x}$, čia $n \in \boldsymbol{N}$, $n > 1$, vadinama *šakniẽs fùnkcija*.

Funkcijos $y = \sqrt[2n]{x}$, $n \in \boldsymbol{N}$:

- apibrėžimo sritis yra intervalas $[0; +\infty)$;
- reikšmių sritis yra intervalas $[0; +\infty)$.

Funkcijos $y = \sqrt[2n+1]{x}$, $n \in \boldsymbol{N}$:

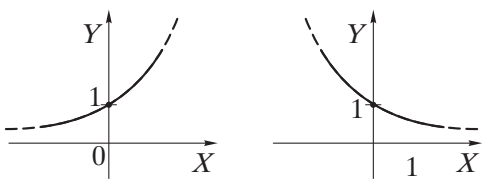
- apibrėžimo sritis yra intervalas $(-\infty; +\infty)$;
- reikšmių sritis yra intervalas $(-\infty; +\infty)$.

Rodiklinės funkcijos

Funkcija $y = f(x) = a^x$, čia a — skaičius, $a > 0$ ir $a \neq 1$, vadinama *rodìkline fùnkcija*.

Rodiklinė funkcija $y = f(x) = a^x$ visoje apibrėžimo srityje yra:

- didėjanti, kai $a > 1$;
- mažėjanti, kai $0 < a < 1$.

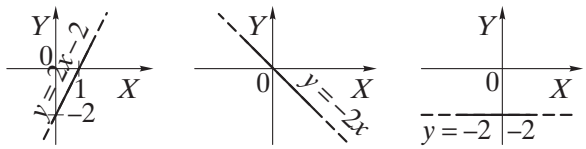


Rodiklinės funkcijos $y = f(x) = a^x$:

- apibrėžimo sritis yra intervalas $(-\infty; +\infty)$;
- reikšmių sritis yra intervalas $(0; +\infty)$.

$y = f(x) = 2x - 2$, $y = g(x) = -2x$, $y = h(x) = -2$ — tiesinės funkcijos.

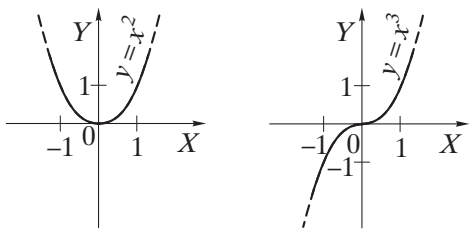
Tiesė $y = 2x - 3$ ašį OY kerta taške $(0; -3)$, ašį OX — taške $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$.



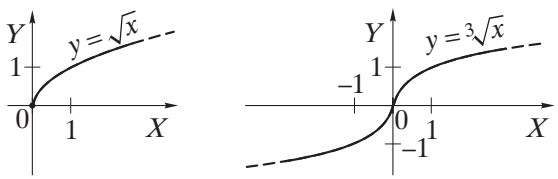
$y = f(x) = x^2$, $y = f(x) = x^3$ — laipsninės funkcijos.

Funkcija $y = f(x) = x^2$ yra lyginė, nes $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

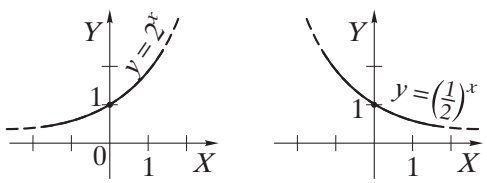
Funkcija $y = f(x) = x^3$ yra nelyginė, nes $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.



$y = f(x) = \sqrt{x}$, $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$ — šaknies funkcijos.



$y = f(x) = 2^x$, $y = g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ — rodiklinės funkcijos.

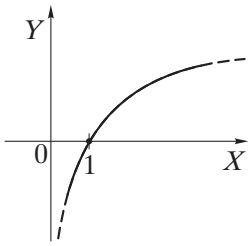


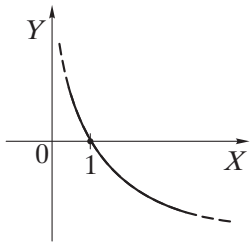
Logaritminės funkcijos

Funkcija $y = f(x) = \log_a x$, čia a — skaičius, $a > 0$ ir $a \neq 1$, vadinama *logarìtmine fùnkcija*.

Logaritminė funkcija $y = f(x) = \log_a x$ visoje apibrėžimo srityje yra:

- didėjanti, kai $a > 1$;
- mažėjanti, kai $0 < a < 1$.





Logaritminės funkcijos $y = f(x) = \log_a x$:

- apibrėžimo sritis yra intervalas $(0; +\infty)$;
- reikšmių sritis yra intervalas $(-\infty; +\infty)$.

Trigonometrinės funkcijos. Periodinės funkcijos

Funkcija $y = f(x)$ vadinama *periòdine*, jei yra tokia T reikšmė, su kuria $f(x+T) = f(x)$ visiems x iš funkcijos apibrėžimo srities. Mažiausias teigiamas toks skaičius T yra vadinamas *mažiáusiuoju teigiamúoju periodù*.

Funkcijos $y = f(x) = \sin x$:

- apibrėžimo sritis (laipsniais) yra intervalas $(-\infty; +\infty)$;
- reikšmių sritis yra intervalas $[-1; 1]$.

Funkcija $y = f(x) = \sin x$ yra periodinė. Jos mažiausias teigiamas periodas yra $360°$:
$\sin x = \sin(x + 360°)$.

Funkcija $y = f(x) = \sin x$ yra nelyginė:
$\sin(-x) = -\sin x$.

Funkcijos $y = f(x) = \cos x$:

- apibrėžimo sritis (laipsniais) yra intervalas $(-\infty; +\infty)$;
- reikšmių sritis yra intervalas $[-1; 1]$.

Funkcija $y = f(x) = \cos x$ yra periodinė. Jos mažiausias teigiamas periodas yra $360°$:
$\cos x = \cos(x + 360°)$.

Funkcija $y = f(x) = \cos x$ yra lyginė:
$\cos(-x) = \cos x$.

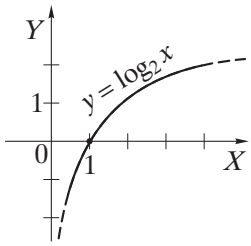
Funkcijos $y = f(x) = \operatorname{tg} x$:

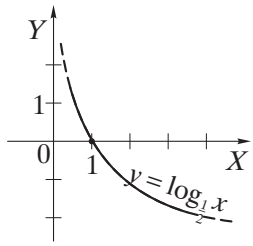
- apibrėžimo sritis yra intervalai $(-90° + 180° \cdot k; 90° + 180° \cdot k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$;
- reikšmių sritis yra intervalas $(-\infty; +\infty)$.

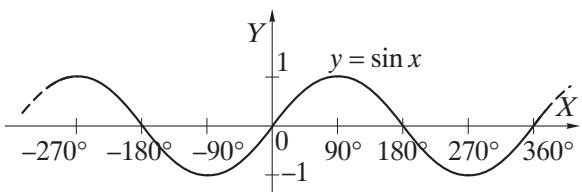
Funkcija $y = f(x) = \operatorname{tg} x$ yra periodinė. Jos mažiausias teigiamas periodas yra $180°$:
$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + 180°)$.

Funkcija $y = f(x) = \operatorname{tg} x$ yra nelyginė:
$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$.

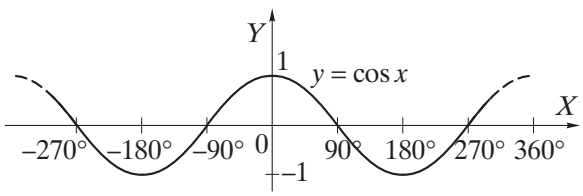
$y = f(x) = \log_2 x$, $y = g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ — logaritminės funkcijos.



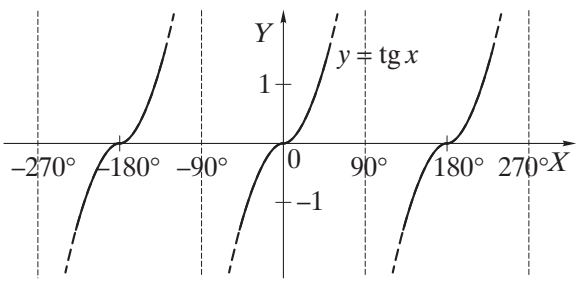




$\sin 390° = \sin(30° + 360°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$,
$\sin(-30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$.

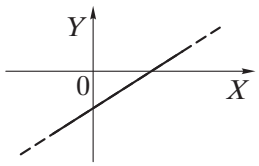


$\cos 390° = \cos(30° + 360°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
$\cos(-30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



$\operatorname{tg} 240° = \operatorname{tg}(60° + 180°) = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$,
$\operatorname{tg}(-60°) = -\operatorname{tg} 60° = -\sqrt{3}$.

321. Nubraižytas funkcijos $y = f(x) = ax + b$ grafiko eskizas. Kokie yra koeficientų a ir b ženklai?



A $a > 0, b > 0$ **B** $a = 0, b > 0$ **C** $a < 0, b < 0$
D $a > 0, b < 0$ **E** $a < 0, b > 0$

322. Tiesinės funkcijos $y = f(x) = 2x + b$ grafikas eina per tašką $A(1; 5)$. Raskite b reikšmę.

323. Parašykite lygtį tiesės $y = ax + b$, einančios per:
a) taškus $(-2; 4)$ ir $(3; -1)$;
b) taškus $(3; 4)$ ir $(-5; -2)$;
c) tašką $(1; -2)$ ir lygiagrečios su tiese $y = 3x - 1$;
d) tašką $(5; -2)$ ir lygiagrečios su OX ašimi.

324. Taškas $A(2; 64)$ priklauso funkcijos $y = f(x) = ax^3$ grafikui.
1) Raskite a reikšmę.
2) Ar šios funkcijos grafikui priklauso taškai $B(-2; 64)$ ir $C(-2; -64)$?

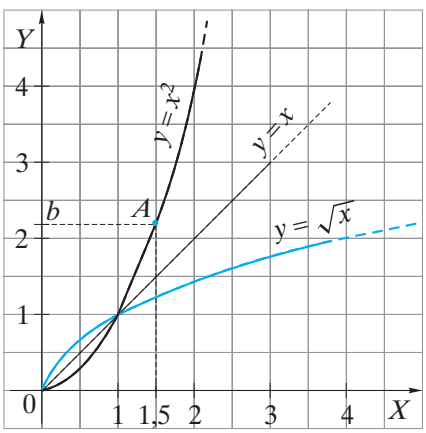
325. Nustatykite, ar funkcija $y = f(x)$ yra lyginė, ar nelyginė, ar nėra nei lyginė, nei nelyginė, kai:

a) $f(x) = -3x^2$; b) $f(x) = \frac{2}{x}$; c) $f(x) = 2 + x$; d) $f(x) = 2x^2 - x$;
e) $f(x) = -x^3$; f) $f(x) = x^3 - 5$; g) $f(x) = -\sqrt[3]{x}$; h) $f(x) = \sqrt[3]{-x}$;
i) $f(x) = x^2 + x^4$; j) $f(x) = x^5 + x$; k) $f(x) = \frac{1}{x} + 2$; l) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

326. Duotos funkcijos: $y = f(x) = x^2 + 1$, $y = g(x) = x^3 - 1$, $y = h(x) = (x-1)^2$, $y = k(x) = -x^3$. Ar funkcijos grafikas yra simetrinis:
a) OY ašies atžvilgiu? b) koordinačių pradžios taško atžvilgiu?

327. 1) Parašykite funkciją $y = g(x)$, kurios grafikas gaunamas funkcijos $y = f(x)$ grafiką pastūmus:
a) per 3 vienetus aukštyn, kai $f(x) = x^2$; b) per 3 vienetus žemyn, kai $f(x) = -x^3$;
c) per 4 vienetus aukštyn, kai $f(x) = \sqrt{x}$; d) per 4 vienetus žemyn, kai $f(x) = -\sqrt[3]{x}$.
2) Nubraižykite funkcijos $y = g(x)$ grafiką.

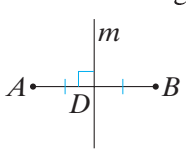
328. Funkcijų $y = f(x) = x^2$, kai $x \in [0; +\infty)$, ir $y = g(x) = \sqrt{x}$ grafikai yra simetriniai vienas kitam tiesės $y = x$ atžvilgiu (žr. pav.).



Taškas $A(1{,}5; b)$ priklauso funkcijos $y = f(x) = x^2$ grafikui.

1) Su kuriuo $y = \sqrt{x}$ grafiko tašku B sutaps taškas A, jei perlenksime lapą per tiesę $y = x$?
A $B(1{,}5; b)$ **B** $B(b; 1{,}5)$ **C** $B(1{,}5; 1{,}5)$ **D** $B(b; b)$ **E** $B(1; 1)$
2) Kokios yra taškų A ir B koordinatės?
3) Kaip, naudojantis liniuotė ir kampainiù, galima rasti tašką B?

Taškai A ir B yra simetriniai tiesės m atžvilgiu, jei $AB \perp m$ ir $AD = DB$.



329. Nubraižykite funkcijos $y = f(x)$ grafiką ir apibūdinkite ją, kai:

a) $f(x) = 7^x$; b) $f(x) = 0{,}7^x$; c) $f(x) = \log_7 x$; d) $f(x) = \log_{0,7} x$.

330. 1) Kokia turi būti m reikšmė, kad funkcijos $y = f(x) = m \cdot 8^x$ grafikas eitų per tašką $(0; 4)$?

2) Kurie iš taškų $A(1; 32)$, $B(2; 256)$, $C(-1; 2)$, $D(-2; 0{,}0625)$ priklauso šios funkcijos grafikui?

331. Bakterijų skaičius B auga pagal dėsnį $B(t) = 3000 \cdot 16^t$, t — laikas valandomis.

a) Kiek bakterijų buvo pradiniu laiko momentu $t = 0$?

b) Kiek bakterijų bus po $\frac{1}{4}$ h? $\frac{1}{2}$ h? 1 h?

c) Po kiek laiko bakterijų kiekis padvigubės?

332. Iš pradžių mėginyje buvo 1000 bakterijų, po 3 valandų — jau 8000. Žinoma, kad bakterijų skaičius B didėja pagal rodiklinį dėsnį, t. y. kas valandą jų kiekis padidėja vienodą skaičių kartų.

a) Užrašykite šį dėsnį.

b) Po kelių valandų bakterijų kiekis bus dvigubai didesnis už pradinį? bus lygus 32 000?

333. Raskite funkcijos $y = f(x)$ apibrėžimo sritį, kai:

a) $f(x) = \log_4 (x^2 - 1)$; b) $f(x) = \log_2(-x^2 + 3x)$; c) $f(x) = \log_{\frac{1}{7}} (6 + x - x^2)$;

d) $f(x) = \lg \sqrt{3 - 2x}$; e) $f(x) = \lg \frac{1}{3x+7}$; f) $f(x) = \lg \frac{3}{\sqrt{x}}$.

334. Taškas M priklauso $y = \log_4 x$ grafikui. Raskite taško M nežinomą koordinatę, kai:

a) $M(16; y)$; b) $M(\frac{1}{4}; y)$; c) $M(x; 1)$; d) $M(x; 3)$.

335. Taškas M priklauso $y = \log_a x$ grafikui. Nustatykite logaritmo pagrindo a reikšmę, jei taško M koordinatės yra:

a) $(7; 1)$; b) $(25; 2)$; c) $(\frac{1}{10}; 1)$; d) $(10; -1)$.

336. Remdamiesi funkcijų $y = f(x) = \sin x$, $y = g(x) = \cos x$ ir $y = h(x) = \operatorname{tg} x$ periodiškumu, apskaičiuokite:

a) $\sin 660°$; b) $\cos 780°$; c) $\operatorname{tg} 600°$; d) $\operatorname{tg} 510°$;

e) $\sin(-330°)$; f) $\sin(-780°)$; g) $\cos(-405°)$; h) $\operatorname{tg}(-570°)$.

337. Raskite mažiausią ir didžiausią funkcijos $y = f(x)$ reikšmes, kai:

a) $f(x) = \sin x + 1$; b) $f(x) = 3 \cos x$; c) $f(x) = 5 \cos x + 2$; d) $f(x) = -\sin x$.

338. 1) Nubraižykite funkcijos $y = f(x)$ grafiką, kai:

a) $f(x) = \sin x + 2$; b) $f(x) = \cos x - 1$; c) $f(x) = -\operatorname{tg} x$.

2) Nurodykite funkcijos $y = f(x)$ apibrėžimo ir reikšmių sritis.

3) Ar ši funkcija yra lyginė, ar nelyginė, ar nėra nei lyginė, nei nelyginė?

4) Su kuriomis intervalo $[-180°; 180°]$ reikšmėmis $y = 0$? $y > 0$? $y < 0$?

5) Su kuriomis intervalo $[-180°; 180°]$ reikšmėmis funkcijos reikšmės didėja? mažėja?

339. 1) Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykite grafikus:

a) $y = \sin x$, $y = -\frac{1}{2}$; b) $y = \cos x$, $y = \frac{1}{2}$.

2) Nurodykite lygties sprendinius, priklausančius intervalui $[-360°; 360°]$.

a) $\sin x = -\frac{1}{2}$; b) $\cos x = \frac{1}{2}$.

340. 1) Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykite $y = \operatorname{tg} x$, kai $x \in (-270°; -90°)$, $y = 1$ ir $y = -1$ grafikus.

2) Nurodykite lygties sprendinius, priklausančius intervalui $(-270°; -90°)$.

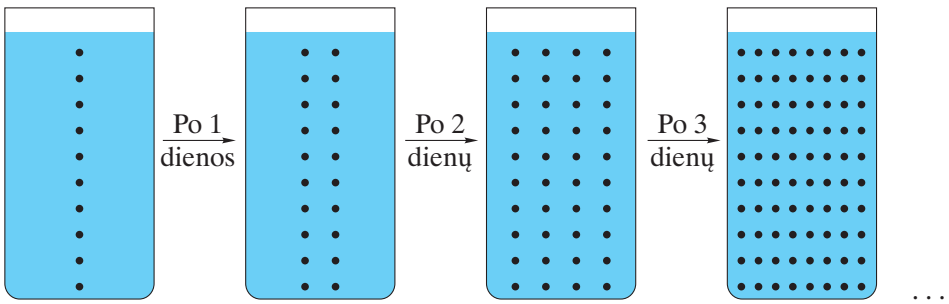
a) $\operatorname{tg} x = 1$; b) $\operatorname{tg} x = -1$.

341. Keturios juodmargės ir trys žalos karvės per 5 dienas duoda tiek pat pieno, kiek ir trys juodmargės ir penkios žalos karvės per 4 dienas. Kurios karvės — juodmargės ar žalos — duoda daugiau pieno?

Rodiklinis kitimas

Šiame atverstinyje panagrinėsime situacijas, kai teigiamas dydis per kiekvieną laiko vienetą padidėja (sumažėja) po tiek pat kartų.

1 PAVYZDYS. Mėgintuvėlyje yra 10 bakterijų. Kas dieną jų skaičius padvigubėja. Panagrinėkime, kaip kinta bakterijų skaičius mėgintuvėlyje.



10 bakterijų — 20 bakterijų — 40 bakterijų — 80 bakterijų

Po 1 dienos mėgintuvėlyje bus

$$10 \cdot 2,$$

po 2 dienų —

$$(10 \cdot 2) \cdot 2 = 10 \cdot 2^2,$$

po 3 dienų —

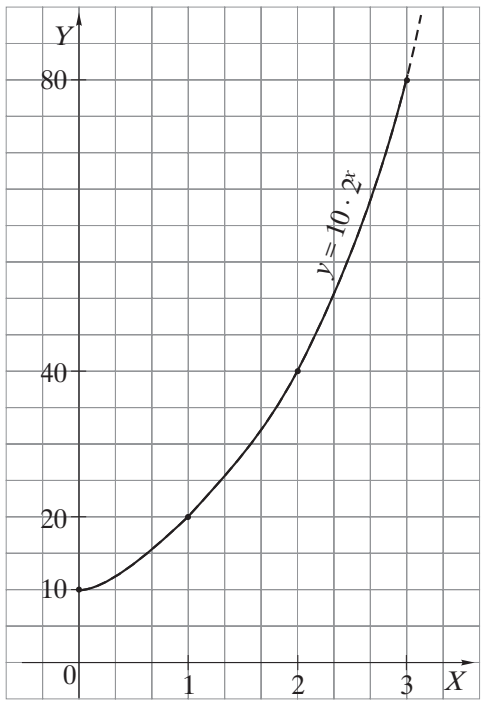
$$\left(10 \cdot 2^2\right) \cdot 2 = 10 \cdot 2^3,$$

.....

po x dienų —

$$\left(10 \cdot 2^{x-1}\right) \cdot 2 = 10 \cdot 2^x$$

bakterijų.



Mėgintuvėlio bakterijų skaičių y po x dienų galima apskaičiuoti remiantis formule

$$y = 10 \cdot 2^x.$$

Jei dydis $a > 0$ per tam tikrą laiko tarpsnį *padidėja* k kartų, tai po x tarpsnių šio dydžio reikšmė bus

$$y = a \cdot k^x.$$

1 užduotis. Bakterijų skaičius mėgintuvėlyje per dieną padvigubėja. Iš pradžių jų buvo:
a) 1; b) 5; c) 20.
1) Kiek bakterijų bus mėgintuvėlyje po 1 dienos? 3 dienų? 10 dienų?
2) Užrašykite formulę, pagal kurią būtų galima apskaičiuoti mėgintuvėlio bakterijų skaičių y po x dienų.
3) Nubraižykite tą formulę atitinkančios funkcijos grafiką.

2 PAVYZDYS. Mėgintuvėlyje yra 800 bakterijų. Kas dieną jų skaičius sumažėja dvigubai. Kiek bakterijų bus mėgintuvėlyje po 5 dienų?

Po 1 dienos mėgintuvėlyje bus

$$800 \cdot \frac{1}{2},$$

po 2 dienų —

$$\left(800 \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = 800 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

po 3 dienų —

$$\left(800 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) \cdot \frac{1}{2} = 800 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3,$$

po 4 dienų —

$$\left(800 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3\right) \cdot \frac{1}{2} = 800 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4,$$

po 5 dienų —

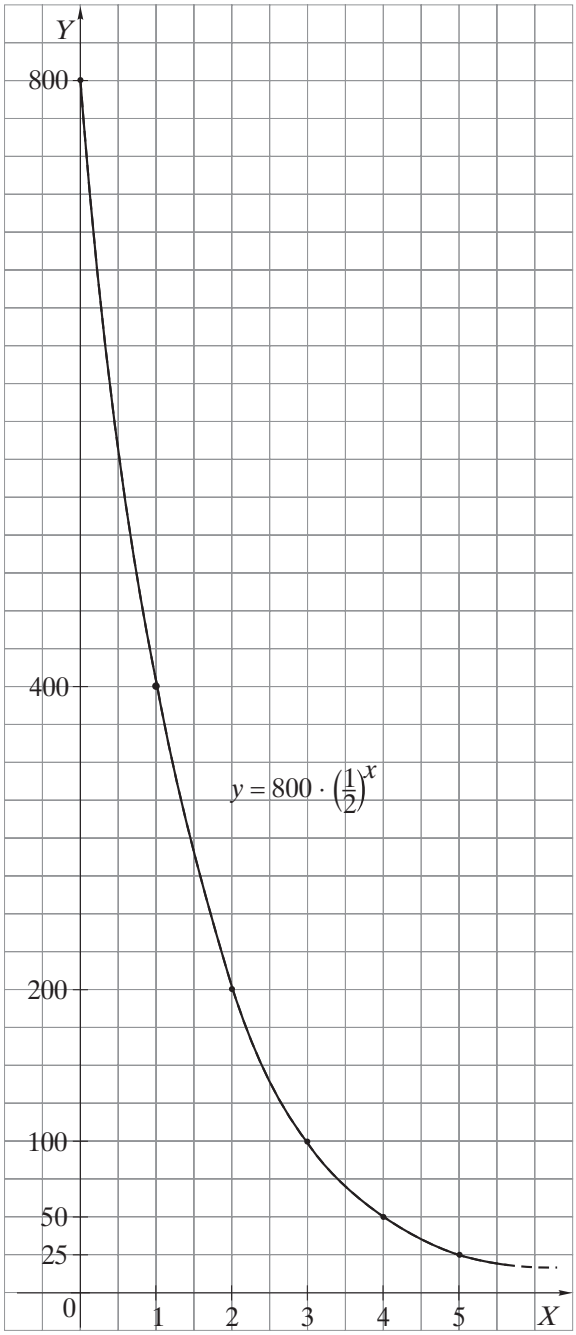
$$\left(800 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4\right) \cdot \frac{1}{2} = 800 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

bakterijų.

Taigi po 5 dienų mėgintuvėlyje bus

$$800 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 800 \cdot \frac{1}{32} = 25$$

bakterijos.



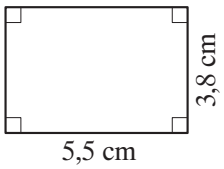
Jei dydis $a > 0$ per tam tikrą laiko tarpsnį *sumažėja* k kartų, tai po x tarpsnių šio dydžio reikšmė bus

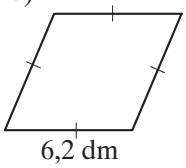
$$y = a \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^x.$$

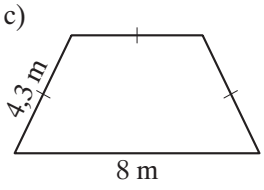
2 užduotis. Mėgintuvėlyje yra 2000 bakterijų. Kas dieną jų skaičius sumažėja dvigubai.
1) Kiek bakterijų bus mėgintuvėlyje po 1 dienos? 2 dienų? 4 dienų?
2) Užrašykite formulę, pagal kurią būtų galima apskaičiuoti mėgintuvėlio bakterijų skaičių y po x dienų.
3) Nubraižykite tą formulę atitinkančios funkcijos grafiką.

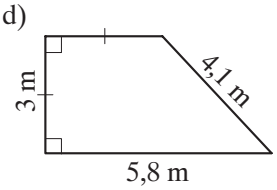
Keturkampiai

342. Apskaičiuokite pavaizduoto keturkampio perimetrą.

a) 

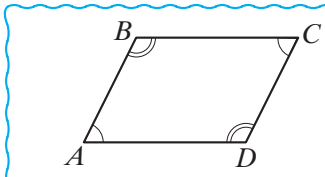
b) 

c) 

d) 

Perimètras — visų kraštinių ilgių suma.

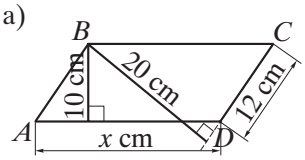
343. Apskaičiuokite lygiagretainio kampų dydžius, jei:
a) vieno kampo dydis yra 35°;
b) vienas kampas yra 38° mažesnis už kitą kampą;
c) vienas kampas trigubai didesnis už kitą kampą;
d) trijų kampų dydžių suma lygi 255°.

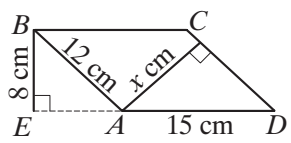


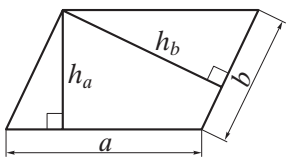
$\angle A+\angle B = \angle B+\angle C = 180°$.

344. Lygiagretainio $ABCD$ kampo A pusiaukampinė dalija kraštinę BC į 3 cm ir 5 cm ilgio atkarpas. Apskaičiuokite lygiagretainio perimetrą.

345. $ABCD$ yra lygiagretainis.
Remdamiesi brėžinio duomenimis, apskaičiuokite x.

a) 

b) 



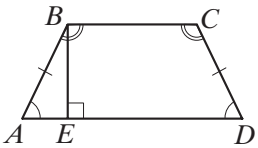
Lygiagretainio plotas
$S = a \cdot h_a = b \cdot h_b$.

346. Rombo įstrižainių ilgiai yra 36 cm ir 48 cm. Apskaičiuokite rombo:
a) kraštinės ilgį; b) perimetrą; c) plotą.

347. Jei stačiakampio ilgį padidintume 15 cm, o plotį sumažintume 5 cm, tai stačiakampio plotas liktų nepakitęs. Jei to paties stačiakampio ilgį sumažintume 3 cm, o plotį padidintume 4 cm, tai jo plotas padidėtų 18 cm^2. Apskaičiuokite pradinio stačiakampio kraštinių ilgius.

348. Kvadrato įstrižainės ilgis yra $3\sqrt{2}$ cm. Apskaičiuokite kvadrato:
a) kraštinės ilgį; b) perimetrą; c) plotą.

349. Lygiašonės trapecijos $ABCD$ pagrindai yra $AD = 5{,}4$ dm, $BC = 1{,}4$ dm, o šoninė kraštinė $AB = 2{,}9$ dm.
Apskaičiuokite trapecijos plotą.



$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot BE$.

350. Lygiašonės trapecijos pagrindų ilgiai yra 5 cm ir 11 cm, o kampo prie pagrindo dydis lygus 60°. Apskaičiuokite trapecijos:
a) aukštinės ilgį; b) šoninės kraštinės ilgį; c) perimetrą; d) plotą.

351. $ABCD$ yra stačioji trapecija ($AB \perp AD$, $AB \perp BC$), $AB = BC = 4$ cm, $\angle D = 30°$. Apskaičiuokite trapecijos perimetrą ir plotą.

Tikimybės

352. Klasėje yra 10 berniukų ir 15 mergaičių. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai pakviestas atsakinėti klasės mokinys bus:
a) mergaitė? b) berniukas?
Atsakymą užrašykite paprastąja trupmena ir dešimtaine trupmena.

> Jei klasėje yra m mergaičių ir n berniukų, tai tikimybė, kad atsakinėti bus pakviesta mergaitė, lygi $\frac{m}{m+n}$, o tikimybė, kad atsakinėti bus pakviestas berniukas, lygi $\frac{n}{m+n}$, t. y.
>
> $\mathbf{P}\,(\text{Atsakinės mergaitė}) = \frac{\text{Mergaičių skaičius}}{\text{Mokinių skaičius}} = \frac{m}{m+n}$,
>
> $\mathbf{P}\,(\text{Atsakinės berniukas}) = \frac{\text{Berniukų skaičius}}{\text{Mokinių skaičius}} = \frac{n}{m+n}$.

353. Tikimybė, kad 11 a klasėje atsakinėti bus pakviesta mergaitė, lygi $\frac{3}{5}$.
1) Kam lygi tikimybė, kad atsakinėti bus pakviestas berniukas?
2) Kurių — mergaičių ar berniukų — yra daugiau 11 a klasėje?
3) Kiek mergaičių gali būti 11 a klasėje, jei iš viso joje mokosi daugiau kaip 10, bet ne daugiau kaip 30 mokinių?

354. Kam lygi tikimybė, kad dabar pakviestas atsakinėti Jūsų klasės mokinys:
a) būsite Jūs? b) nebūsite Jūs? c) bus mergaitė? d) bus berniukas?

355. Ant stalo guli 3 mėlynai rašantys, 2 raudonai rašantys ir 5 juodai rašantys tušinukai. Jonas paima vieną tušinuką.
1) Kokia tikimybė, kad tas tušinukas rašo:
   a) mėlynai? b) raudonai? c) juodai? d) žaliai?
2) Kas tikėtiniau:
   a) ar kad Jono paimtas tušinukas rašo mėlynai, ar — juodai?
   b) ar kad Jono paimtas tušinukas rašo mėlynai, ar — raudonai?
   c) ar kad Jono paimtas tušinukas rašo raudonai, ar — žaliai?

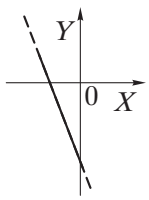
356. Dėžutėje yra 4 kortelės, ant kurių surašyti skaitmenys 1, 2, 3 ir 4. Lina iš dėžutės paima vieną kortelę ir ant lapo užrašo kortelės skaitmenį. Paimtą kortelę ji atideda į šalį. Tada iš dėžutės ima kitą kortelę ir jos skaitmenį užrašo ant lapo parašytojo skaitmens dešinėje. Taip Lina gauna dviženklį skaičių.
1) Surašykite visus tokiu būdu galimus gauti dviženklius skaičius.
2) Kam lygi tikimybė, kad taip sudarytas skaičius:
   a) yra lyginis? b) yra nelyginis? c) yra skaičiaus 5 kartotinis? d) yra mažesnis už 50?
3) Kas tikėtiniau:
   a) ar kad Linos sudarytas skaičius yra lyginis, ar — nelyginis?
   b) ar kad Linos sudarytas skaičius yra lyginis, ar — mažesnis už 50?
   c) ar kad Linos sudarytas skaičius yra skaičiaus 5 kartotinis, ar — nelyginis?
4) Išspręskite šį uždavinį tuo atveju, kai paimtoji kortelė yra padedama atgal į dėžutę.

357. Yra dvi dėžės. Pirmoje dėžėje yra 4 krepšinio ir 6 futbolo kamuoliai, o antrojoje — 7 tinklinio ir 3 rankinio kamuoliai. Benas ima vieną kamuolį iš vienos dėžės, o kitą — iš kitos.
1) Kam lygi tikimybė, kad:
   a) iš pirmos dėžės Benas paėmė krepšinio kamuolį?
   b) iš antros dėžės Benas paėmė tinklinio kamuolį?
2) Kas tikėtiniau: ar kad Benas iš pirmos dėžės paėmė krepšinio kamuolį, ar kad iš antrosios — tinklinio?

358. Tikimybė iš dėžės ištraukti baltą rutulį lygi 0,2. Kam lygi tikimybė iš dėžės ištraukti juodą rutulį, jei toje dėžėje yra tik balti, juodi ir žali rutuliai, o juodų rutulių skaičius lygus:
a) baltų rutulių skaičiui? b) žalių rutulių skaičiui?

359. Kuri tiesė pavaizduota?

A $y = -3x+2$ **B** $y = -3x$ **C** $y = 3x-2$ **D** $y = 3x+2$ **E** $y = -3x-2$



360. Tiesė $y = 2x - 4$ kerta OY ašį taške, kurio ordinatė lygi:

A 2 **B** -4 **C** $-\frac{1}{2}$ **D** -2 **E** 0

361. Kuri funkcija yra mažėjanti intervale $(-\infty; +\infty)$?

A $y = f(x) = 2x - 4$ **B** $y = g(x) = x^2$ **C** $y = h(x) = -x + 2$ **D** $y = l(x) = x^3$

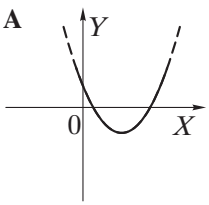
E $y = m(x) = -x^2$

362. Funkcijos $y = f(x) = x^3$ apibrėžimo sritis yra intervalas:

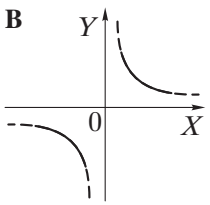
A $(-\infty; 0)$ **B** $(0; +\infty)$ **C** $(-\infty; +\infty)$ **D** $[0; +\infty)$ **E** $(-\infty; 0]$

363. Kuris grafikas yra lyginės funkcijos?

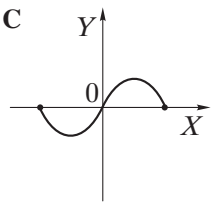
A



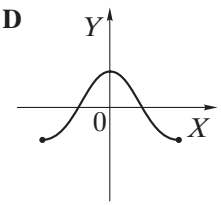
B



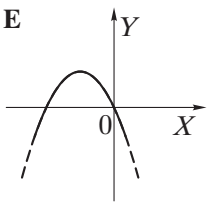
C



D



E



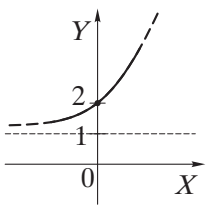
364. Funkcijos $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$ grafikas yra šiuose koordinačių plokštumos ketvirčiuose:

A I ir II **B** I, II, III ir IV **C** I **D** I ir IV **E** I ir III

365. Kuris grafikas pavaizduotas?

A $y = 2^x$ **B** $y = 2^x + 2$ **C** $y = 2^x + 1$ **D** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

E $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$



366. Funkcijos $y = f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(2x - 5)$ apibrėžimo sritis yra:

A $(2{,}5; +\infty)$ **B** $(-\infty; 2{,}5)$ **C** $(-\infty; +\infty)$ **D** $[2{,}5; +\infty)$ **E** Nustatyti neįmanoma

367. Kuriam grafikui priklauso taškas $A(-2; 9)$?

A $y = \frac{x}{3}$ **B** $y = x^3$ **C** $y = \sqrt[3]{x}$ **D** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ **E** $y = \log_3 x$

368. Kokią didžiausią reikšmę gali įgyti funkcija $y = f(x) = \sin x$?

A 2 **B** 1 **C** 0 **D** -1 **E** -2

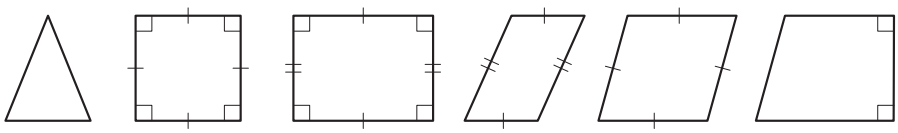
369. Mažiausia funkcijos $y = f(x) = \cos x$ reikšmė lygi:

A 1 **B** 0 **C** $-\frac{1}{2}$ **D** -1 **E** Nustatyti neįmanoma

370. Funkcijos $y = f(x) = \operatorname{tg} x$ reikšmė intervale $(-90°; 90°)$ lygi 0, kai:

A $x = -45°$ **B** $x = 0°$ **C** $x = 45°$ **D** $x = 60°$ **E** $x = -30°$

371. Ant stalo guli 6 figūros.



Kokia tikimybė, kad atsitiktinai paimta viena figūra bus lygiagretainis?

A 1 **B** $\frac{1}{3}$ **C** $\frac{1}{6}$ **D** $\frac{1}{2}$ **E** $\frac{2}{3}$

372. Nebraižydami funkcijos $y = f(x)$ grafiko, raskite x reikšmes, su kuriomis $f(x) = 0$; $f(x) \leqslant 0$; $f(x) > 0$, kai:

a) $f(x) = 3x$; b) $f(x) = -2x + 1$; c) $f(x) = -\frac{x}{2} - 2$.

373. Ar tiesė $y = ax + b$ eina per tašką $A(-2; 4)$?

a) $y = -2x$; b) $y = x - 2$; c) $y = 3x + 2$; d) $y = -\frac{x}{2} + 3$; e) $y = 4$.

374. 1) Nubraižykite funkcijos $y = f(x)$ grafiką, kai:

a) $f(x) = x^2$; b) $g(x) = x^3$; c) $h(x) = \sqrt{x}$; d) $m(x) = \sqrt[3]{x}$.

2) Nurodykite funkcijos apibrėžimo ir reikšmių sritis.

3) Ar funkcija yra lyginė, ar nelyginė, ar nėra nei lyginė, nei nelyginė?

4) Su kuriomis x reikšmėmis $y = 0$? $y > 0$? $y < 0$?

5) Su kuriomis x reikšmėmis funkcijos reikšmės didėja? mažėja?

375. Ar funkcija $y = f(x)$ yra lyginė, ar nelyginė, ar nėra nei lyginė, nei nelyginė, kai:

a) $f(x) = 3x$? b) $f(x) = x^2 - 2$? c) $f(x) = x^3 + 2$? d) $f(x) = -\sqrt[3]{x}$?

376. Ar taškas A priklauso funkcijos $y = f(x)$ grafikui, kai:

a) $f(x) = x^4$, $A(-1; -1)$? b) $f(x) = x^5$, $A(-1; -1)$? c) $f(x) = -x^3$, $A(-1; -1)$?

d) $f(x) = \sqrt{x}$, $A(4; 2)$? e) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $A(-8; -2)$? f) $f(x) = -\sqrt[3]{x}$, $A(-1; 1)$?

377. a) Surašykite skaičius didėjimo tvarka:

2^6; 2^{-5}; 2^0; 2^{20}; 2^{-14}; 2^{10}.

b) Surašykite skaičius mažėjimo tvarka:

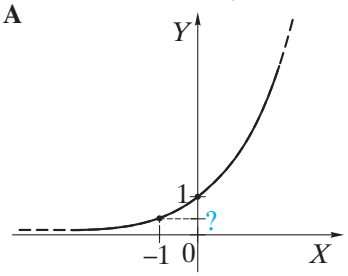
$(\frac{1}{3})^4$; $(\frac{1}{3})^{-7}$; $(\frac{1}{3})^0$; $(\frac{1}{3})^{15}$; $(\frac{1}{3})^{-16}$; $(\frac{1}{3})^7$.

378. Raskite funkcijos $y = f(x)$ apibrėžimo sritį, kai:

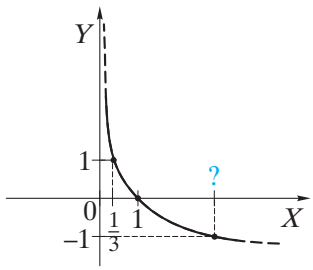
a) $f(x) = \log_3(2x)$; b) $f(x) = \log_2(x + 1)$; c) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 9)$; d) $f(x) = \lg(x^2 + 9)$.

379. Nubraižyti $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ ir $y = 3^x$ grafikai.

A



B

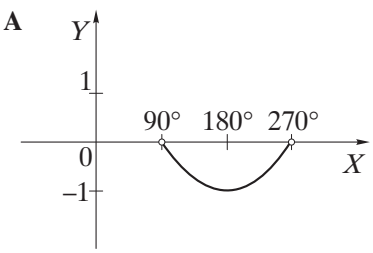


1) Kuris grafikas kuriame paveikslėlyje pavaizduotas?

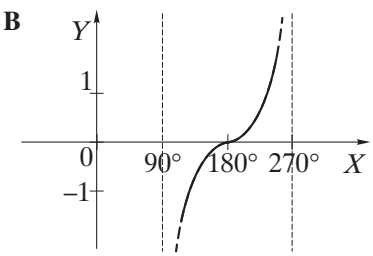
2) Kokie skaičiai turėtų būti parašyti vietoj klaustukų?

380. Nubraižyti $y = \sin x$, $y = \cos x$ ir $y = \operatorname{tg} x$ grafikai intervale $(90°; 270°)$. Kuris grafikas kuriame paveikslėlyje pavaizduotas?

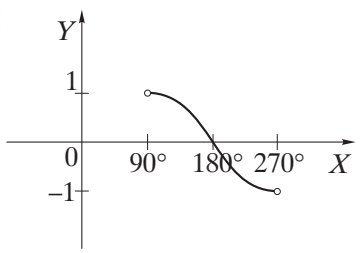
A



B



C



381. Surašykite didėjimo tvarka skaičius:

a) $\sin 30°$; $\sin(-90°)$; $\sin 50°$; $\sin(-10°)$;

b) $\cos 100°$; $\cos 150°$; $\cos(-70°)$; $\cos(-10°)$;

c) $\operatorname{tg} 80°$; $\operatorname{tg}(-80°)$; $\operatorname{tg} 0°$; $\operatorname{tg}(-20°)$.

Kartojame tai, ko prireiks 4 skyriuje

382. Iš skaičių -2; -1; 0; 1; 2 išrinkite ir surašykite tuos, kurie yra lygties sprendiniai.

a) $4-3x=10$; b) $x^2-x=0$; c) $x^2-x-2=0$; d) $\frac{x^2+2x}{x}=0$; e) $\frac{x^2-2x+1}{x+1}=0$.

Nežinomojo reikšmė, su kuria lygtis virsta teisinga skaitine lygybe, vadinama *lygties sprendiniu*.

Skaičius -2 yra lygties $2x=-4$ sprendinys, nes lygybė $2\cdot(-2)=-4$ yra teisinga.

383. Išspręskite tiesinę (pirmojo laipsnio) lygtį.

a) $2x+12=0$; b) $1-5x=-3$;

c) $0{,}5x+3=1$; d) $3-2{,}5x=-5$;

e) $\frac{x}{3}-4=2$; f) $-3-\frac{x}{5}=4$;

g) $\frac{x}{2}+3=5$; h) $2-\frac{x}{4}=-1$;

i) $\frac{x}{3}+\frac{2}{9}=\frac{1}{9}$; j) $\frac{1}{2}+\frac{x}{5}=3$.

Išspręskime lygtį $4-\frac{x}{3}=1$.

I būdas.
$4-\frac{x}{3}=1, \ |-4$
$-\frac{x}{3}=-3, \ |\cdot(-3)$
$x=9$.

II būdas.
$4-\frac{x}{3}=1, \ |\cdot 3$
$12-x=3, \ |-12$
$-x=-9, \ |:(-1)$
$x=9$.

Atsakymas. $x=9$.

384. Išspręskite kvadratinę (antrojo laipsnio) lygtį.

a) $x^2-4x+3=0$; b) $x^2-4x-5=0$; c) $x^2+6x+8=0$; d) $x^2+x-2=0$;

e) $2x^2+5x-3=0$; f) $3x^2+5x-2=0$; g) $3x^2-8x+4=0$; h) $2x^2+3x+1=0$;

i) $x^2-6x+9=0$; j) $x^2-10x+25=0$; k) $4x^2-4x+1=0$; l) $9x^2+24x+16=0$;

m) $x^2+x+2=0$; n) $x^2+2x+5=0$; o) $2x^2+3x+4=0$; p) $2x^2+3x+40=0$.

Kvadratinę lygtį $ax^2+bx+c=0$ patogu spręsti naudojantis diskriminantu $D=b^2-4ac$.

Kai $D>0$, lygtis turi du skirtingus sprendinius: $x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, $x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$.

Kai $D=0$, lygtis turi vieną sprendinį (kartais sakoma — du lygius sprendinius) $x=-\frac{b}{2a}$.

Kai $D<0$, lygtis sprendinių neturi.

385. Išspręskite trupmeninę (racionaliąją) lygtį.

a) $\frac{x-5}{2-x}=0$; b) $\frac{x-4}{1-x}=0$; c) $\frac{(x-2)(x+1)}{x-2}=0$; d) $\frac{x^2+4x+3}{x+1}=0$; e) $\frac{x^2-6x+8}{x-2}=0$.

Išspręskime lygtį $\frac{x^2+2x-8}{x+4}=0$.

Trupmena $\frac{a}{b}$ lygi 0, kai skaitiklis $a=0$, o vardiklis $b\neq 0$. Todėl randame tas x reikšmes, su kuriomis skaitiklis lygus 0:

$x^2+2x-8=0$, $D=36$, $x_1=-4$, $x_2=2$.

Patikriname, ar su šiomis x reikšmėmis vardiklis $x+4$ nelygus 0.
Kai $x=-4$, tai $x+4=-4+4=0$. Vadinasi, $x=-4$ nėra lygties sprendinys.
Kai $x=2$, tai $x+4=2+4=6\neq 0$. Vadinasi, $x=2$ yra lygties sprendinys.
Atsakymas. $x=2$.

386. a) Raskite skaičių x, kurį pakėlę trečiuoju laipsniu gautume 8; -8; 0; 1.
b) Raskite skaičių x, iš kurio ištraukę kvadratinę šaknį gautume 3; -3; 0; 1.
c) Raskite skaičių x, kuriuo pakėlę skaičių 3 gautume 9; -9; 0; 1.
d) Raskite skaičių x, kurio logaritmas pagrindu 3 lygus 2; -2; 0; 1.
e) Raskite skaičius x, kurių modulis lygus 5; -5; 0; 1.

387. Raskite posūkio kampus x, priklausančius intervalui $[0°; 360°]$, kurių:

a) sinusas lygus $\frac{1}{2}$; b) kosinusas lygus $\frac{1}{2}$; c) tangentas lygus 0.

Lygtys

4.1. Lygtys su trečiaisiais laipsniais 102
4.2. Lygtys su kvadratinėmis šaknimis 104
4.3. Rodiklinės lygtys 106
4.4. Logaritminės lygtys 108
4.5. Lygtys su moduliais 110
4.6. Sprendžiame sudėtingesnes lygtis 112
4.7. Lygtys su sinusais 114
4.8. Lygtys su kosinusais 116
4.9. Lygtys su tangentais 118
Apibendriname 120
Sprendžiame 122
Besidomintiems 124
Šiek tiek apie lygtis, jų apibrėžimo sritis ir ekvivalentumą
Geometrijos uždaviniai. Stačiakampis gretasienis 126
Įvairūs uždaviniai. Darbo uždaviniai 127
Testas 128
Pasitikriname 129
Kartojame tai, ko prireiks 5 skyriuje 130

Sprendžiant įvairius uždavinius, dažnai tenka ieškoti tokių x reikšmių, su kuriomis reiškiniai $f(x)$ ir $g(x)$ įgyja tas pačias reikšmes. Šias x reikšmes galima gauti sprendžiant lygtį

$$f(x) = g(x).$$

Spręsdami lygtį $f(x) = g(x)$ ją tvarkome tol, kol gauname

$x = a$ (x — lygties nežinomasis, a — skaičius, t. y. lygties sprendinys).

Lygtiẽs sprendinỹs — tokia nežinomojo reikšmė, su kuria lygtis virsta teisinga skaitine lygybe.

Pavyzdžiui: skaičius 3 *yra* lygties $2 \cdot x = 6$ sprendinys, nes lygybė $2 \cdot 3 = 6$ *yra* teisinga; skaičius -3 *nėra* lygties $2 \cdot x = 6$ sprendinys, nes lygybė $2 \cdot (-3) = 6$ *nėra* teisinga.

Išspręsti lỹgtį — reiškia rasti visus jos sprendinius arba įsitikinti, kad lygtis sprendinių neturi.

Žemesnėse klasėse mokėmės spręsti įvairias lygtis, pavyzdžiui:

$ax + b = 0$ — tiesinė lygtis,

$ax^2 + bx + c = 0$ — kvadratinė lygtis,

$\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ — trupmeninė racionalioji lygtis.

Šiame skyriuje spręsime lygtis, kurias galima užrašyti taip:

$$x^3 = a, \quad \sqrt{x} = a, \quad \log_a x = b, \quad |x| = a, \quad \sin x = a, \quad \cos x = a, \quad \operatorname{tg} x = a.$$

4.1. Lygtys su trečiaisiais laipsniais

Šiame atverstinyje spręsime lygtis

$$x^3 = a.$$

Taip pat spręsime lygtis, kurias galima pertvarkyti į šį pavidalą, t. y.

$$ax^3 + b = c.$$

Tokios lygtys vadinamos ***trečiojo laipsnio***, arba ***kubinėmis***, ***lygtimis***.

1 užduotis. Įsitikinkite, kad:

a) $x = 2$ yra lygties $x^3 = 8$ sprendinys;

b) $x = -2$ yra lygties $x^3 = -8$ sprendinys;

c) $x = \sqrt[3]{5}$ yra lygties $x^3 = 5$ sprendinys;

d) $x = -\sqrt[3]{5}$ yra lygties $x^3 = -5$ sprendinys.

Skaičius $x = -3$ yra lygties $x^3 = -27$ sprendinys, nes lygybė $(-3)^3 = -27$ yra teisinga.

$\sqrt[3]{a}$ yra skaičius, kurio 3-asis laipsnis lygus a, t. y. $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$.

2 užduotis. Duotos paprasčiausios trečiojo laipsnio (kubinės) lygtys $x^3 = a$:

a) $x^3 = 64$; b) $x^3 = -64$; c) $x^3 = 65$; d) $x^3 = -63$.

1) Mintinai raskite šių lygčių sprendinius.

2) Išspręskite šias lygtis, iš abiejose jos pusėse esančių reiškinių traukdami trečiojo laipsnio (kubines) šaknis.

$x^3 = -27,$
$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{-27},$
$x = -3.$

$\sqrt[3]{a^3} = a;$
$\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}.$

$x^3 = a,$
$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{a},$
$x = \sqrt[3]{a}.$

$x^3 = -8,$
$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{-8},$
$x = -2.$

Trečiojo laipsnio (kubinė) lygtis $x^3 = a$ turi vienintelį sprendinį $x = \sqrt[3]{a}$.

3 užduotis. Išspręskite sudėtingesnes trečiojo laipsnio (kubines) lygtis $ax^3 + b = c$.

a) $x^3 + 1 = 9$; b) $x^3 - 2 = -10$; c) $x^3 - 1 = -6$;

d) $2x^3 = 16$; e) $-3x^3 = 24$; f) $3x^3 = -15$;

g) $2x^3 + 1 = 17$; h) $-3x^3 - 2 = 22$; i) $-2x^3 - 3 = 7$.

$-2x^3 + 6 = -2,$
$-2x^3 = -8,$
$x^3 = 4,$
$x = \sqrt[3]{4}.$

4.1. Uždaviniai

388. Raskite skaičių x, kurį pakėlę trečiuoju laipsniu gautume:
a) 1000; b) -125; c) 0,001; d) $-0{,}027$; e) $\frac{1}{8000}$; f) $-\frac{216}{343}$; g) $1\frac{61}{64}$; h) $-3\frac{3}{8}$.

389. Išspręskite lygtį $x^3 = a$.
a) $x^3 = 1000$; b) $x^3 = -125$; c) $x^3 = 0{,}001$; d) $x^3 = -0{,}027$;
e) $x^3 = \frac{1}{8000}$; f) $x^3 = -\frac{216}{343}$; g) $x^3 = 1\frac{61}{64}$; h) $x^3 = -3\frac{3}{8}$.

390. Koks skaičius turėtų būti parašytas vietoj x, kad būtų teisinga lygybė:
a) $x^3 = 0$? b) $x^3 = 1$? c) $x^3 = -1$? d) $x^3 = 3$? e) $x^3 = -3$?
f) $x^3 = 0{,}1$? g) $x^3 = -1001$? h) $x^3 = \frac{2}{5}$? i) $x^3 = -\frac{8}{9}$? j) $x^3 = \frac{10}{13}$?

391. Užrašykite lygtį $x^3 = a$, kurios sprendinys būtų skaičius:
a) $x = 2$; b) $x = -1$; c) $x = 0$; d) $x = 8$; e) $x = -10$;
f) $x = 0{,}2$; g) $x = -1{,}1$; h) $x = \frac{1}{8}$; i) $x = -\frac{3}{4}$; j) $x = 2\frac{1}{2}$.

392. Raskite kubo briaunos ilgį a centimetrais, decimetrais ir metrais, jei kubo tūris:
a) $V = 1\,\text{dm}^3$; b) $V = 0{,}008\,\text{m}^3$; c) $V = \frac{125}{8}\,\text{cm}^3$.

393. Išspręskite lygtį $x^3 + a = b$.
a) $x^3 + 10 = 1010$; b) $x^3 - 25 = -150$; c) $x^3 + 3 = 3$;
d) $x^3 + 0{,}2 = 0{,}325$; e) $x^3 - 2{,}05 = -0{,}322$; f) $x^3 - 2\frac{1}{3} = \frac{1}{27}$;
g) $x^3 + 2 = 18$; h) $x^3 + 2{,}5 = 15{,}2$; i) $x^3 + 3\frac{2}{5} = -5\frac{2}{5}$.

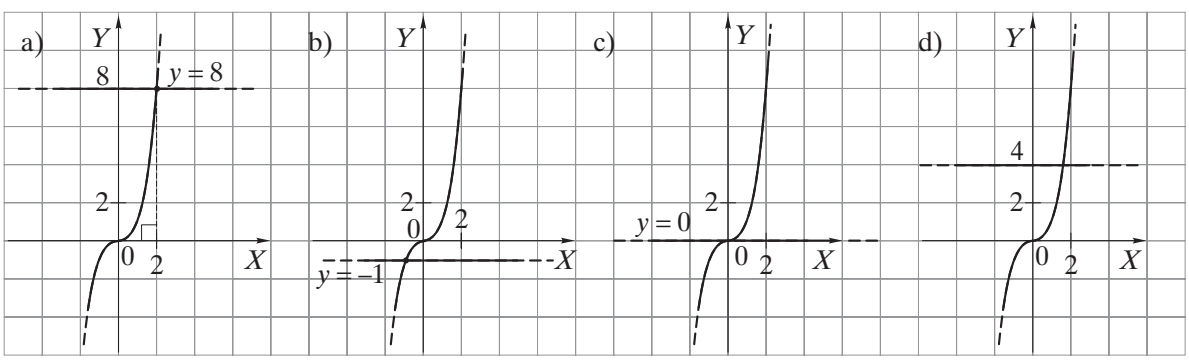
$x^3 + 3 = -24$,
$x^3 = -27$,
$x = \sqrt[3]{-27}$,
$x = -3$.

394. Išspręskite lygtį $ax^3 = b$.
a) $2x^3 = 2$; b) $-3x^3 = 24\,000$; c) $5x^3 = -625$;
d) $0{,}1x^3 = 100$; e) $-1{,}5x^3 = \frac{3}{2}$; f) $\frac{3}{4}x^3 = 0$;
g) $2x^3 = 22$; h) $-0{,}5x^3 = 5$; i) $-\frac{2}{3}x^3 = \frac{2}{5}$.

$2x^3 = -16$,
$x^3 = -8$,
$x = \sqrt[3]{-8}$,
$x = -2$.

395. Išspręskite lygtį $ax^3 + b = c$.
a) $2x^3 + 3 = 19$; b) $3x^3 - 4 = -7$; c) $-3x^3 + 2 = 8$;
d) $3x^3 + 2{,}1 = 26{,}1$; e) $0{,}1x^3 - 2 = -2$; f) $-x^3 - 1{,}3 = -1{,}273$;
g) $4x^3 + 1 = 1\frac{1}{2}$; h) $\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{50} = 0$; i) $-\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

396. Pavaizduotas lygties $x^3 = a$ grafinis sprendimas. Užrašykite lygtį ir jos sprendinį.



397. Išspręskite lygtį $x^3 = a$ braižydami grafikus $y = x^3$ ir $y = a$.
a) $x^3 = -8$; b) $x^3 = 1$; c) $x^3 = -4$; d) $x^3 = 2$; e) $x^3 = -2$.

4.2. Lygtys su kvadratinėmis šaknimis

Šiame atverstinyje spręsime lygtis

$$\sqrt{x} = a.$$

Taip pat spręsime lygtis, kurias galima pertvarkyti į šį pavidalą, t. y.

$$a\sqrt{x} + b = c.$$

Tokios lygtys vadinamos ***iracionaliõsiomis lygtimìs***.



1 užduotis. Įsitikinkite, kad:

a) $x = 9$ yra lygties $\sqrt{x} = 3$ sprendinys;

b) $x = 0$ yra lygties $\sqrt{x} = 0$ sprendinys;

c) $x = 0{,}25$ yra lygties $\sqrt{x} = 0{,}5$ sprendinys;

d) $x = \frac{4}{9}$ yra lygties $\sqrt{x} = \frac{2}{3}$ sprendinys;

e) lygtis $\sqrt{x} = -3$ sprendinių neturi.

Skaičius $x = 16$ yra lygties $\sqrt{x} = 4$ sprendinys, nes lygybė $\sqrt{16} = 4$ yra teisinga.

$\sqrt{a}$ yra neneigiamas skaičius, t. y. $\sqrt{a} \geqslant 0$.

Jei $\sqrt{a} = b$, tai $b^2 = a$ $(a \geqslant 0,\ b \geqslant 0)$.

2 užduotis. Duotos paprasčiausios iracionaliosios lygtys $\sqrt{x} = a$:

a) $\sqrt{x} = 5$; b) $\sqrt{x} = 1$; c) $\sqrt{x} = 0$; d) $\sqrt{x} = -5$.

1) Mintinai raskite lygčių a), b) ir c) sprendinius.
2) Paaiškinkite, kodėl lygtis d) neturi sprendinių.
3) Išspręskite a), b) ir c) lygtis, abiejose jos pusėse esančius reiškinius keldami kvadratu.

$\sqrt{x} = 4,$
$(\sqrt{x})^2 = 4^2,$
$x = 16.$

$(\sqrt{a})^2 = a,$ kai $a \geqslant 0$.

$\sqrt{x} = a,$
$(\sqrt{x})^2 = a^2,$
$x = a^2.$

$\sqrt{x} = 3,$
$(\sqrt{x})^2 = 3^2,$
$x = 9.$

$\sqrt{x} = -3$ — lygtis sprendinių neturi.

Iracionalioji lygtis $\sqrt{x} = a$:
- turi vienintelį sprendinį $x = a^2$, kai $a \geqslant 0$;
- neturi sprendinių, kai $a < 0$.

3 užduotis. Išspręskite sudėtingesnes iracionaliąsias lygtis $a\sqrt{x} + b = c$.

a) $\sqrt{x} + 2 = 5$; b) $\sqrt{x} - 3 = -1$; c) $\sqrt{x} + 3 = 1$;

d) $2\sqrt{x} = 6$; e) $-3\sqrt{x} = -6$; f) $-4\sqrt{x} = 8$;

g) $2\sqrt{x} + 2 = 8$; h) $-3\sqrt{x} - 3 = -9$; i) $2\sqrt{x} + 4 = 0$.

$-5\sqrt{x} + 6 = -14,$
$-5\sqrt{x} = -20,$
$\sqrt{x} = 4,$
$x = 16.$

4.2. Uždaviniai

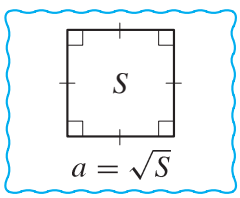
398. Ar yra toks skaičius x, iš kurio ištraukę kvadratinę (antrojo laipsnio) šaknį gautume:
a) 5? b) 8? c) 0,1? d) $\frac{2}{3}$? e) $1\frac{2}{5}$? f) -7?
Jei taip, tai užrašykite tą skaičių.

399. Išspręskite lygtį $\sqrt{x} = a$.
a) $\sqrt{x} = 5$; b) $\sqrt{x} = 8$; c) $\sqrt{x} = 0{,}1$; d) $\sqrt{x} = \frac{2}{3}$; e) $\sqrt{x} = 1\frac{2}{5}$; f) $\sqrt{x} = -7$.

400. Koks skaičius turėtų būti parašytas vietoj x, kad būtų teisinga lygybė:
a) $\sqrt{x} = 0$? b) $\sqrt{x} = 1$? c) $\sqrt{x} = -1$? d) $\sqrt{x} = 0{,}5$? e) $\sqrt{x} = 1{,}2$?
f) $\sqrt{x} = \frac{3}{4}$? g) $\sqrt{x} = -\frac{1}{2}$? h) $\sqrt{x} = 2\frac{3}{5}$? i) $\sqrt{x} = 1\frac{5}{6}$? j) $\sqrt{x} = -11\frac{7}{9}$?

401. Užrašykite lygtį $\sqrt{x} = a$, kurios sprendinys būtų skaičius:
a) $x = 9$; b) $x = 49$; c) $x = 0{,}25$; d) $x = \frac{4}{81}$; e) $x = 6\frac{1}{4}$; f) $x = 0$.

402. Raskite kvadrato kraštinės ilgį a, jei kvadrato plotas:
a) $S = 144\,\text{cm}^2$; b) $S = 6{,}25\,\text{dm}^2$; c) $S = 1\frac{7}{9}\,\text{m}^2$.
Atsakymą parašykite centimetrais, decimetrais ir metrais.



403. Išspręskite lygtį $\sqrt{x} + a = b$.
a) $\sqrt{x} + 3 = 7$; b) $\sqrt{x} - 2 = -6$; c) $\sqrt{x} - 5 = -2$;
d) $\sqrt{x} + 3{,}1 = 5{,}1$; e) $\sqrt{x} - 0{,}2 = 5{,}8$; f) $\sqrt{x} - 4{,}7 = -4{,}8$;
g) $\sqrt{x} + \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$; h) $\sqrt{x} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$; i) $\sqrt{x} - \frac{2}{3} = -1\frac{1}{2}$.

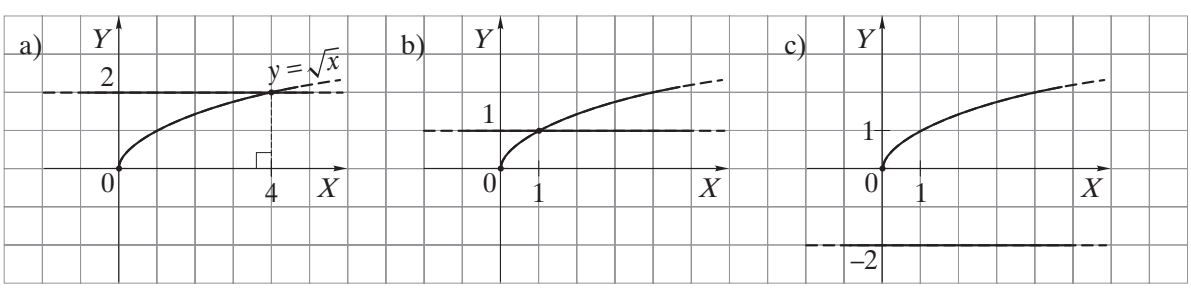
$\sqrt{x} - 5 = -2$,
$\sqrt{x} = 3$,
$x = 9$.

404. Išspręskite lygtį $a\sqrt{x} = b$.
a) $2\sqrt{x} = 18$; b) $3\sqrt{x} = -6$; c) $-4\sqrt{x} = -2$;
d) $0{,}3\sqrt{x} = 9$; e) $-1{,}2\sqrt{x} = 24$; f) $-3{,}5\sqrt{x} = -0{,}7$;
g) $\frac{2}{3}\sqrt{x} = 6$; h) $-\frac{5}{7}\sqrt{x} = 0$; i) $-\frac{3}{4}\sqrt{x} = -\frac{1}{2}$.

$-5\sqrt{x} = -3$,
$\sqrt{x} = \frac{3}{5}$,
$x = \frac{9}{25}$.

405. Išspręskite lygtį $a\sqrt{x} + b = c$.
a) $3\sqrt{x} + 2 = 5$; b) $2\sqrt{x} - 8 = -5$; c) $-2\sqrt{x} - 4 = 1$;
d) $0{,}2\sqrt{x} + 1{,}5 = 2$; e) $-2{,}5\sqrt{x} + 6 = 1$; f) $-1{,}2\sqrt{x} + 0{,}1 = 5{,}2$;
g) $\frac{1}{3}\sqrt{x} + 3 = 5$; h) $\frac{2}{5}\sqrt{x} - \frac{1}{2} = -1$; i) $\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

406. Pavaizduotas lygties $\sqrt{x} = a$ grafinis sprendimas. Užrašykite lygtį ir jos sprendinį.



407. Išspręskite lygtį $\sqrt{x} = a$ braižydami grafikus $y = \sqrt{x}$ ir $y = a$.
a) $\sqrt{x} = 3$; b) $\sqrt{x} = 1$; c) $\sqrt{x} = 0$; d) $\sqrt{x} = -1$; e) $\sqrt{x} = 1{,}5$.

4.3. Rodiklinės lygtys

Šiame atverstinyje spręsime lygtis

$$a^x = b \quad (a > 0, a \neq 1).$$

Taip pat spręsime lygtis, kurias galima pertvarkyti į šį pavidalą, t. y.

$$a \cdot b^x + c = d.$$

Tokios lygtys vadinamos ***rodiklinėmis lygtimis***.



1 užduotis. Įsitikinkite, kad:

a) $x = 2$ yra lygties $3^x = 9$ sprendinys;

b) $x = 0$ yra lygties $3^x = 1$ sprendinys;

c) $x = -2$ yra lygties $3^x = \frac{1}{9}$ sprendinys;

d) $x = \log_3 4$ yra lygties $3^x = 4$ sprendinys;

e) $x = \lg 3$ yra lygties $10^x = 3$ sprendinys;

f) lygtis $3^x = -9$ sprendinių neturi;

g) lygtis $3^x = 0$ sprendinių neturi.

Skaičius $x = -3$ yra lygties $2^x = \frac{1}{8}$ sprendinys, nes lygybė $2^{-3} = \frac{1}{8}$ yra teisinga.

Skaičius $\log_2 3$ yra lygties $2^x = 3$ sprendinys, nes lygybė $2^{\log_2 3} = 3$ yra teisinga.

a^x turi prasmę, kai $a > 0$ ir $a \neq 1$.
Su visais $a > 0$, $a \neq 1$ reiškinys $a^x > 0$.

2 užduotis. Duotos paprasčiausios rodiklinės lygtys $a^x = b$:

a) $2^x = 8$; b) $5^x = \frac{1}{25}$; c) $2^x = 7$; d) $4^x = -3$.

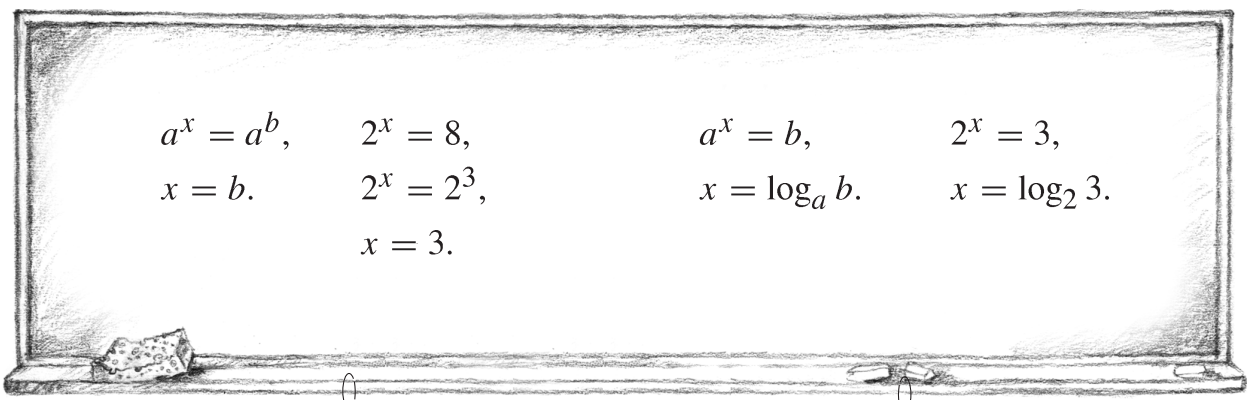
1) Mintinai raskite lygčių a), b) ir c) sprendinius.
2) Paaiškinkite, kodėl lygtis d) neturi sprendinių.
3) Išspręskite a), b) ir c) lygtis, dešiniojoje pusėje esantį skaičių pakeitę laipsniu, kurio pagrindas lygus kairiojoje pusėje esančio laipsnio pagrindui.

$2^x = 3$,
$2^x = 2^{\log_2 3}$,
$x = \log_2 3$.

$a^x = a^b$,
kai $x = b$.

$2^x = 3$,
$x = \log_2 3$.

$a^x = b$,
kai $x = \log_a b$.



Rodiklinė lygtis $a^x = b$ $(a > 0, a \neq 1)$:
- turi vienintelį sprendinį $x = \log_a b$, kai $b > 0$;
- neturi sprendinių, kai $b \leqslant 0$.

3 užduotis. Išspręskite sudėtingesnes rodiklines lygtis $a \cdot b^x + c = d$.

a) $2^x + 3 = 11$; b) $10^x - 5 = -4$; c) $3^x + 5 = 2$;

d) $3 \cdot 2^x = 24$; e) $-2 \cdot 10^x = -2$; f) $2 \cdot 3^x = -2$;

g) $3 \cdot 2^x + 3 = 27$; h) $-2 \cdot 10^x - 5 = -7$; i) $2 \cdot 3^x + 3 = 1$.

$-2 \cdot 3^x + 1 = -17$,
$-2 \cdot 3^x = -18$,
$3^x = 9$,
$x = 2$.

4.3. Uždaviniai

408. Ar yra toks skaičius x, kuriuo pakėlę:

a) skaičių 2 gautume 16? b) skaičių 3 gautume $\frac{1}{27}$? c) skaičių $\frac{1}{2}$ gautume 1?
d) skaičių 2 gautume 5? e) skaičių 2 gautume 0? f) skaičių 3 gautume -9?

Jei taip, tai užrašykite tą skaičių.

409. Išspręskite lygtį $a^x = b$.

a) $2^x = 16$; b) $3^x = \frac{1}{27}$; c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 1$; d) $2^x = 5$; e) $2^x = 0$; f) $3^x = -9$.

410. Koks skaičius turėtų būti parašytas vietoj x, kad būtų teisinga lygybė:

a) $4^x = 1$? b) $\left(\frac{1}{6}\right)^x = 1$? c) $6^x = 0$? d) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 0$? e) $3^x = -1$? f) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = -1$?
g) $7^x = 9$? h) $\left(\frac{3}{5}\right)^x = 2$? i) $8^x = \frac{1}{8}$? j) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 25$? k) $2^x = -3$? l) $\left(\frac{3}{4}\right)^x = -\frac{9}{16}$?

411. Išspręskite lygtį $a^x + b = c$.

a) $2^x + 1 = 9$; b) $3^x - 12 = 15$; c) $4^x - 3 = -2$;
d) $\left(\frac{1}{2}\right)^x + 5 = 7$; e) $\left(\frac{1}{3}\right)^x - 7 = 2$; f) $\left(\frac{1}{4}\right)^x - 6 = -5$;
g) $6^x + 1 = 3$; h) $10^x - 3 = 2$; i) $5^x + 1 = 0$;
j) $\left(\frac{2}{3}\right)^x + 3 = 4$; k) $\left(\frac{1}{5}\right)^x - 2 = 3$; l) $\left(\frac{3}{4}\right)^x + 6 = 1$.

$3^x - 4 = 5$,
$3^x = 9$,
$3^x = 3^2$,
$x = 2$.

412. Išspręskite lygtį $b \cdot a^x = c$.

a) $3 \cdot 2^x = 12$; b) $-2 \cdot 3^x = -6$; c) $15 \cdot 3^x = 15$;
d) $2 \cdot 2^x = 1$; e) $-3 \cdot 3^x = -\frac{1}{3}$; f) $5 \cdot 5^x = -1$;
g) $3 \cdot 2^x = 9$; h) $-2 \cdot 3^x = -8$; i) $3 \cdot 5^x = 0$;
j) $3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{3}{4}$; k) $-4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x = -12$; l) $3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x = 0$;
m) $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{2}{3}$; n) $-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x = -\frac{1}{4}$; o) $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x = -1$.

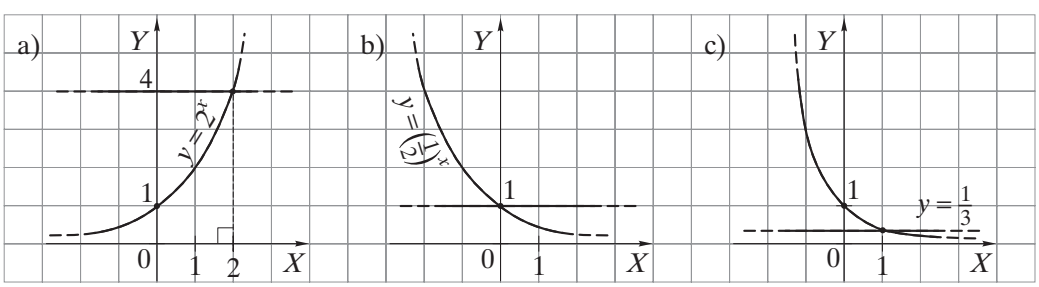
$-2 \cdot 4^x = -\frac{1}{2}$,
$4^x = \frac{1}{4}$,
$4^x = 4^{-1}$,
$x = -1$.

413. Išspręskite lygtį $b \cdot a^x + c = d$.

a) $2 \cdot 5^x + 3 = 13$; b) $-3 \cdot 4^x + 1 = -2$; c) $5 \cdot 3^x + 6 = 1$;
d) $2 \cdot 7^x + 1 = 7$; e) $-5 \cdot 2^x + 6 = -9$; f) $4 \cdot 3^x - 3 = -8$;
g) $4 \cdot 6^x + 5 = 5$; h) $-2 \cdot 3^x + 3 = -11$; i) $3 \cdot 4^x - 1 = 8$;
j) $3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 5 = 11$; k) $-3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + 4 = -1$; l) $5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x + 7 = 7$;
m) $\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1 = 5$; n) $-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x + 3 = -5$; o) $\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x - 4 = -9$.

$3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2 = 4$,
$3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 6$,
$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2$,
$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$,
$x = -1$.

414. Pavaizduotas lygties $a^x = b$ grafinis sprendimas. Užrašykite lygtį ir jos sprendinį.



415. Išspręskite lygtį $a^x = b$ braižydami grafikus $y = a^x$ ir $y = b$.

a) $2^x = 2$; b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4$; c) $3^x = \frac{1}{3}$; d) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 1$; e) $2^x = 0$; f) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = -1$.

4.4. Logaritminės lygtys

Šiame atverstinyje spręsime lygtis

$$\log_a x = b.$$

Taip pat spręsime lygtis, kurias galima pertvarkyti į šį pavidalą, t. y.

$$a \cdot \log_b x + c = d.$$

Tokios lygtys vadinamos ***logarìtminėmis lygtimìs***.

1 užduotis. Įsitikinkite, kad:

a) $x = 9$ yra lygties $\log_3 x = 2$ sprendinys;

b) $x = 1$ yra lygties $\log_4 x = 0$ sprendinys;

c) $x = \frac{1}{2}$ yra lygties $\log_2 x = -1$ sprendinys;

d) $x = \sqrt{3}$ yra lygties $\log_3 x = \frac{1}{2}$ sprendinys.

Skaičius $x = 8$ yra lygties $\log_2 x = 3$ sprendinys, nes lygybė $\log_2 8 = 3$ yra teisinga.

2 užduotis. Duotos paprasčiausios logaritminės lygtys $\log_a x = b$:

a) $\log_5 x = 3$; b) $\log_2 x = 1$; c) $\log_3 x = 0$; d) $\log_4 x = -2$.

1) Remdamiesi logaritmo apibrėžimu, mintinai raskite šių lygčių sprendinius.
2) Išspręskite lygtis, dešiniojoje pusėje esantį skaičių pakeitę logaritmu, kurio pagrindas lygus kairiojoje pusėje esančio logaritmo pagrindui.

$\log_3 x = 2$,
$x = 3^2$,
$x = 9$.

$\log_a x = b$,
kai $x = a^b$.

$\log_3 x = 2$,
$\log_3 x = \log_3 9$,
$x = 9$.

$\log_a x = \log_a b$,
kai $x = b$.

$\log_a x = b$,	$\log_2 x = 3$,	$\log_a x = \log_a b$,	$\log_2 x = 3$,
$x = a^b$.	$x = 2^3$,	$x = b$.	$\log_2 x = \log_2 8$,
	$x = 8$.		$x = 8$.

Logaritminė lygtis $\log_a x = b$ $(a > 0, a \neq 1)$ turi vienintelį sprendinį $x = a^b$.

3 užduotis. Išspręskite sudėtingesnes logaritmines lygtis $a \cdot \log_b x + c = d$.

a) $\log_3 x + 1 = 3$; b) $\log_4 x - 5 = -5$; c) $\log_5 x + 2 = 1$;

d) $2 \cdot \log_3 x = 4$; e) $-3 \cdot \log_4 x = 0$; f) $2 \cdot \log_5 x = -2$;

g) $2 \cdot \log_3 x + 1 = 5$; h) $-3 \cdot \log_4 x - 5 = -5$; i) $2 \cdot \log_5 x + 2 = 0$.

$3 \log_2 x + 4 = 13$,
$3 \log_2 x = 9$,
$\log_2 x = 3$,
$x = 2^3$,
$x = 8$.

4.4. Uždaviniai

416. Raskite skaičių x, kurio logaritmas:

a) pagrindu 2 lygus 4; b) pagrindu $\frac{1}{2}$ lygus 4; c) pagrindu 3 lygus 1;

d) pagrindu $\frac{1}{4}$ lygus 0; e) pagrindu 5 lygus -1; f) pagrindu 5 lygus $\frac{1}{2}$.

417. Išspręskite lygtį $\log_a x = b$.

a) $\log_2 x = 4$; b) $\log_{\frac{1}{2}} x = 4$; c) $\log_3 x = 1$; d) $\log_{\frac{1}{4}} x = 0$; e) $\log_5 x = -1$; f) $\log_5 x = \frac{1}{2}$.

418. Koks skaičius turėtų būti parašytas vietoj x, kad būtų teisinga lygybė:

a) $\log_3 x = 2$? b) $\log_2 x = 4$? c) $\log_4 x = 1$? d) $\log_5 x = 0$? e) $\log_6 x = -2$?

f) $\log_{\frac{1}{3}} x = 2$? g) $\log_{\frac{1}{2}} x = 4$? h) $\log_{\frac{1}{4}} x = 1$? i) $\log_{\frac{1}{5}} x = 0$? j) $\log_{\frac{1}{6}} x = -2$?

419. Išspręskite lygtį $\log_a x = b$, dešiniojoje pusėje esantį skaičių pakeitę logaritmu, kurio pagrindas lygus kairiojoje pusėje esančio logaritmo pagrindui.

a) $\log_2 x = 5$; b) $\log_3 x = 2$; c) $\log_4 x = 3$; d) $\log_5 x = -1$; e) $\log_2 x = -3$;

f) $\log_{\frac{1}{2}} x = 3$; g) $\log_{\frac{1}{3}} x = 4$; h) $\log_{\frac{1}{4}} x = 2$; i) $\log_{\frac{1}{5}} x = -1$; j) $\log_{\frac{1}{2}} x = -2$.

420. Išspręskite lygtį $\log_a x + b = c$.

a) $\log_2 x + 2 = 6$; b) $\log_3 x - 3 = 1$; c) $\log_4 x - 2 = -4$;

d) $\log_{\frac{1}{2}} x + 1 = 5$; e) $\log_{\frac{1}{3}} x - 1 = 2$; f) $\log_{\frac{1}{4}} x - 5 = -6$;

g) $\log_2 x + 3 = 4$; h) $\log_3 x - 1 = 0$; i) $\log_4 x - 5 = -3$;

j) $\log_{\frac{2}{3}} x + 5 = 8$; k) $\log_{\frac{3}{4}} x - 2 = 1$; l) $\log_{\frac{4}{5}} x - 7 = -7$.

$\log_3 x - 8 = -6,$
$\log_3 x = 2,$
$x = 3^2,$
$x = 9.$

421. Išspręskite lygtį $b \cdot \log_a x = c$.

a) $3\log_2 x = 12$; b) $-2\log_3 x = -6$; c) $4\log_4 x = 4$;

d) $2\log_{\frac{1}{2}} x = 8$; e) $-3\log_{\frac{1}{3}} x = -9$; f) $4\log_{\frac{1}{4}} x = 0$;

g) $5\log_2 x = 10$; h) $-2\log_3 x = -2$; i) $6\log_4 x = -12$;

j) $3\log_{\frac{1}{2}} x = 6$; k) $-4\log_{\frac{1}{3}} x = -4$; l) $5\log_{\frac{1}{4}} x = -15$.

$-3\log_{\frac{1}{2}} x = 6,$
$\log_{\frac{1}{2}} x = -2,$
$x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2},$
$x = 4.$

422. Išspręskite lygtį $b \cdot \log_a x + c = d$.

a) $2\log_3 x + 4 = 8$; b) $-3\log_2 x + 5 = -4$; c) $4\log_3 x - 3 = -11$;

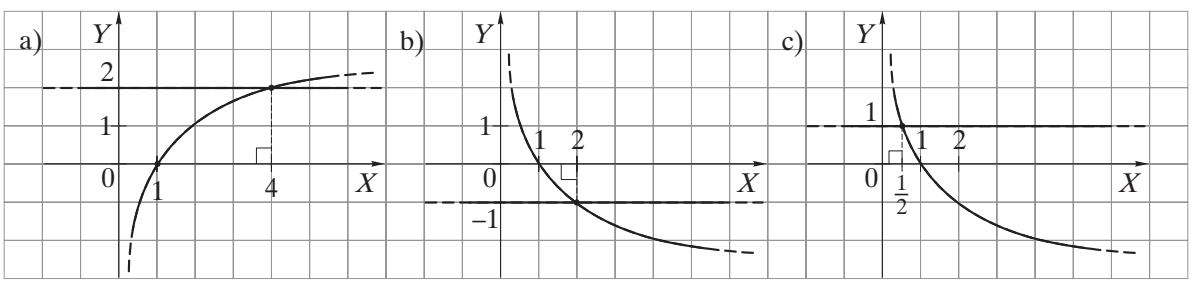
d) $2\log_{\frac{1}{3}} x + 5 = 11$; e) $-3\log_{\frac{1}{2}} x + 1 = -5$; f) $4\log_{\frac{1}{3}} x - 2 = -2$;

g) $5\log_3 x + 1 = 6$; h) $-2\log_2 x + 8 = -2$; i) $2\log_3 x - 1 = 1$;

j) $3\log_{\frac{1}{3}} x + 8 = 20$; k) $-4\log_{\frac{1}{2}} x + 2 = -2$; l) $5\log_{\frac{1}{3}} x - 5 = 0$.

$5\log_2 x - 8 = 7,$
$5\log_2 x = 15,$
$\log_2 x = 3,$
$x = 2^3,$
$x = 8.$

423. Pavaizduotas lygties $\log_a x = b$ grafinis sprendimas. Užrašykite lygtį ir jos sprendinį.



424. Išspręskite lygtį $\log_a x = b$ braižydami grafikus $y = \log_a x$ ir $y = b$.

a) $\log_2 x = 3$; b) $\log_{\frac{1}{2}} x = -2$; c) $\log_3 x = 1$; d) $\log_{\frac{1}{3}} x = 0$; e) $\log_2 x = -1$.

4.5. Lygtys su moduliais

Šiame atverstinyje spręsime lygtis

$$|x| = a.$$

Taip pat spręsime lygtis, kurias galima pertvarkyti į šį pavidalą, t. y.

$$a \cdot |x| + b = c.$$



1 užduotis. Įsitikinkite, kad:

a) $x = 2$ ir $x = -2$ yra lygties $|x| = 2$ sprendiniai;

b) $x = 5$ ir $x = -5$ yra lygties $|x| = 5$ sprendiniai;

c) $x = 0$ yra lygties $|x| = 0$ sprendinys;

d) lygtis $|x| = -2$ sprendinių neturi;

e) lygtis $|x| = -10$ sprendinių neturi.

Skaičiai $x = 3$ ir $x = -3$ yra lygties $|x| = 3$ sprendiniai, nes lygybės $|3| = 3$ ir $|-3| = 3$ yra teisingos.

$$|a| = \begin{cases} -a, & \text{kai } a < 0; \\ a, & \text{kai } a \geqslant 0. \end{cases}$$

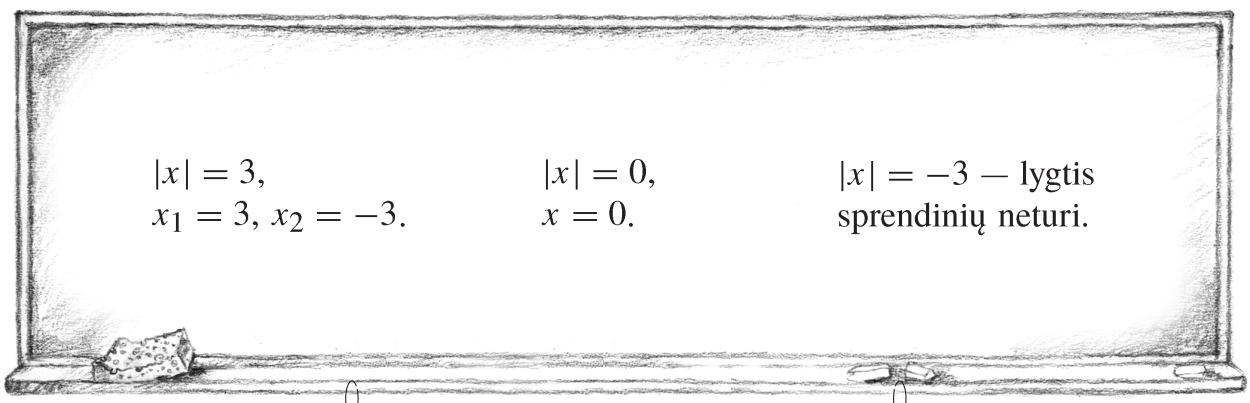
$|a| \geqslant 0.$

2 užduotis. Duotos paprasčiausios lygtys su moduliais $|x| = a$:

a) $|x| = 10$; b) $|x| = 1$; c) $|x| = \sqrt{3}$; d) $|x| = -1$.

1) Mintinai raskite lygčių a), b) ir c) sprendinius.

2) Paaiškinkite, kodėl lygtis d) neturi sprendinių.



$|x| = 3$,
$x_1 = 3$, $x_2 = -3$.

$|x| = 0$,
$x = 0$.

$|x| = -3$ — lygtis sprendinių neturi.

Lygtis $|x| = a$:
- turi du sprendinius $x = a$ ir $x = -a$, kai $a > 0$;
- turi vienintelį sprendinį $x = 0$, kai $a = 0$;
- neturi sprendinių, kai $a < 0$.

3 užduotis. Išspręskite sudėtingesnes lygtis su moduliais $a \cdot |x| + b = c$.

a) $|x| - 2 = 8$; b) $|x| + 5 = 6$; c) $|x| + 4 = 3$;

d) $2 \cdot |x| = 20$; e) $-3 \cdot |x| = -3$; f) $-2 \cdot |x| = 2$;

g) $3 \cdot |x| - 2 = 28$; h) $-2 \cdot |x| + 5 = 3$; i) $3 \cdot |x| + 4 = 1$.

$2 \cdot |x| + 3 = 9$,
$2 \cdot |x| = 6$,
$|x| = 3$,
$x_1 = 3$, $x_2 = -3$.

4.5. Uždaviniai

425. Ar yra toks skaičius (skaičiai) x, kurio modulis lygus:

a) 5? b) 0,2? c) $\frac{3}{4}$? d) 0? e) -5? f) $-0{,}2$? g) $-\frac{3}{4}$?

Jei taip, tai užrašykite tą skaičių (tuos skaičius).

426. Išspręskite lygtį $|x| = a$.

a) $|x| = 5$; b) $|x| = 0{,}2$; c) $|x| = \frac{3}{4}$; d) $|x| = 0$; e) $|x| = -5$; f) $|x| = -0{,}2$; g) $|x| = -\frac{3}{4}$.

427. Koks skaičius (skaičiai) turėtų būti parašytas (parašyti) vietoj x, kad būtų teisinga lygybė:

a) $|x| = 6$? b) $|x| = 1$? c) $|x| = 0$? d) $|x| = -1$? e) $|x| = 3{,}8$? f) $|x| = -3\frac{1}{2}$?

428. Išspręskite lygtį $|x| + a = b$.

a) $|x| + 5 = 8$; b) $|x| - 6 = -3$; c) $|x| - 2 = -10$;

d) $|x| + 2{,}3 = 1{,}2$; e) $|x| - 4{,}1 = -0{,}9$; f) $|x| - 3{,}5 = -3{,}5$;

g) $|x| + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$; h) $|x| - \frac{5}{6} = -\frac{1}{3}$; i) $|x| - 4\frac{1}{2} = -5\frac{2}{5}$.

$|x| - 2 = 4$,
$|x| = 6$,
$x_1 = 6$, $x_2 = -6$.

429. Išspręskite lygtį $a \cdot |x| = b$.

a) $2 \cdot |x| = 12$; b) $-3 \cdot |x| = -27$; c) $-4 \cdot |x| = 16$;

d) $0{,}2 \cdot |x| = 4{,}8$; e) $-1{,}5 \cdot |x| = -15$; f) $-2{,}5 \cdot |x| = 0$;

g) $\frac{2}{3} \cdot |x| = 6$; h) $-5 \cdot |x| = -2$; i) $-\frac{1}{2} \cdot |x| = \frac{1}{4}$.

$-4 \cdot |x| = -1$,
$|x| = \frac{1}{4}$,
$x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = -\frac{1}{4}$.

430. Išspręskite lygtį $a \cdot |x| + b = c$.

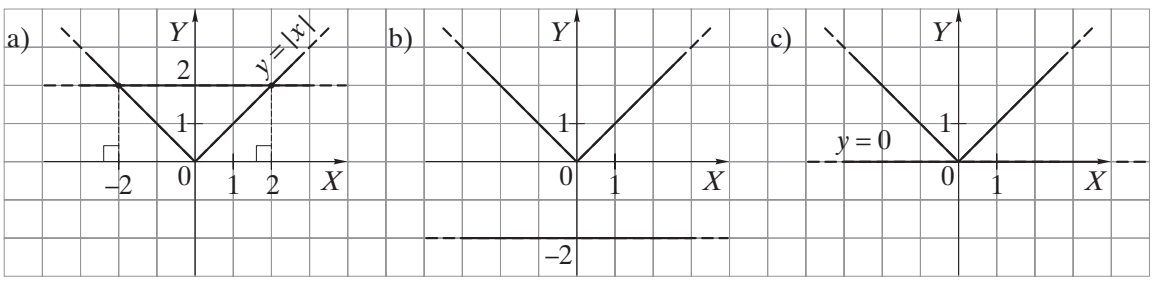
a) $2 \cdot |x| + 3 = 8$; b) $3 \cdot |x| - 6 = 6$; c) $-4 \cdot |x| + 1 = -11$;

d) $3 \cdot |x| + 1{,}5 = 4{,}5$; e) $5 \cdot |x| - 7 = -20{,}5$; f) $-2 \cdot |x| + 7 = 6{,}1$;

g) $\frac{1}{4} \cdot |x| + 3 = 5$; h) $\frac{1}{3} \cdot |x| - \frac{2}{3} = -3$; i) $-\frac{3}{5} \cdot |x| + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

$3 \cdot |x| - 3 = 12$,
$3 \cdot |x| = 15$,
$|x| = 5$,
$x_1 = 5$, $x_2 = -5$.

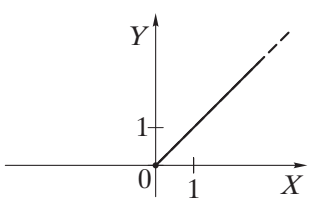
431. Pavaizduotas lygties $|x| = a$ grafinis sprendimas. Užrašykite lygtį ir jos sprendinį.

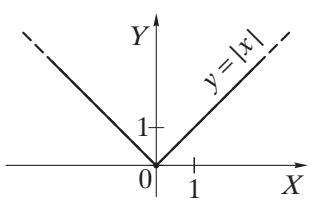


432. Išspręskite lygtį $|x| = a$ braižydami grafikus $y = |x|$ ir $y = a$.

a) $|x| = 3$; b) $|x| = 2{,}5$; c) $|x| = 0$; d) $|x| = -3$; e) $|x| = 3\frac{1}{2}$.

Grafikas $y = |x|$ susideda iš dviejų dalių:
kai $x \geqslant 0$, tai $y = x$; kai $x < 0$, tai $y = -x$.
Jį galima nubraižyti taip:
1) brėžiame tiesę $y = x$, kai $x \in [0; +\infty)$;
2) brėžiame tiesę, simetrinę OY ašies atžvilgiu nubrėžtai tiesei.





4.6. Sprendžiame sudėtingesnes lygtis

Šiame atverstinyje spręsime lygtis:

$\big(f(x)\big)^3 = a$, $\sqrt{f(x)} = a$, $a^{f(x)} = b$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, $\log_a\big(f(x)\big) = b$, $|f(x)| = a$;

čia $f(x) = x + c$, x — nežinomasis, c — skaičius.



1 užduotis. Išspręskite kubinę lygtį. a) $(x-4)^3 = 8$; b) $(x-4)^3 = -8$; c) $(x-4)^3 = 0$.

$(x-2)^3 = 27,$
$\sqrt[3]{(x-2)^3} = \sqrt[3]{27},$
$x - 2 = 3,$
$x = 5.$

$(x-2)^3 = -27,$
$\sqrt[3]{(x-2)^3} = \sqrt[3]{-27},$
$x - 2 = -3,$
$x = -1.$

$(x-2)^3 = 0,$
$x - 2 = 0,$
$x = 2.$

2 užduotis. 1) Išspręskite iracionaliąją lygtį. a) $\sqrt{x-4} = 3$; b) $\sqrt{x-4} = -3$; c) $\sqrt{x-4} = 0$.

$\sqrt{x-2} = 4,$
$\big(\sqrt{x-2}\big)^2 = 4^2,$
$x - 2 = 16,$
$x = 18.$

$\sqrt{x-2} = -4.$
Lygtis sprendinių neturi, nes
$\sqrt{x-2} \geqslant 0$, o $-4 < 0$.

$\sqrt{x-2} = 0,$
$x - 2 = 0,$
$x = 2.$

2) Mokinys lygtį $\sqrt{x+5} = -3$ sprendė neatkreipęs dėmesio į tai, kad ji sprendinių neturi ($-3 < 0$, o $\sqrt{x+5} \geqslant 0$). Jis abiejų lygties pusių reiškinius pakėlė kvadratu ir gavo:

$\big(\sqrt{x+5}\big)^2 = (-3)^2,$
$x + 5 = 9,$
$x = 4.$

Abi lygties puses keldami kvadratu, iš neteisingos lygybės galime gauti teisingą lygybę, pavyzdžiui, $3 \neq -3$, bet $3^2 = (-3)^2$. Todėl, išsprendus iracionaliąją lygtį, ***pravartu patikrinti***, ar gautieji sprendiniai tinka lygčiai.

Į lygtį $\sqrt{x+5} = -3$ vietoj x įrašykite skaičių 4 ir įsitikinkite, kad gautoji skaitinė lygybė yra neteisinga.

3 užduotis. Išspręskite rodiklinę lygtį. a) $2^{x-4} = 8$; b) $2^{x-4} = -8$; c) $2^{x-4} = 0$.

$3^{x-2} = 9,$
$3^{x-2} = 3^2,$
$x - 2 = 2,$
$x = 4.$

$3^{x-2} = -9.$
Lygtis sprendinių neturi, nes
$3^{x-2} > 0$, o $-9 < 0$.

$3^{x-2} = 0.$
Lygtis sprendinių neturi, nes
$3^{x-2} > 0$.

4 užduotis. Išspręskite logaritminę lygtį. a) $\log_2(x-4) = 3$; b) $\log_2(x-4) = -3$; c) $\log_2(x-4) = 0$.

$\log_3(x-2) = 2,$
$x - 2 = 3^2,$
$x - 2 = 9,$
$x = 11.$

$\log_3(x-2) = -2,$
$x - 2 = 3^{-2},$
$x - 2 = \frac{1}{9},$
$x = 2\frac{1}{9}.$

$\log_3(x-2) = 0,$
$x - 2 = 3^0,$
$x - 2 = 1,$
$x = 3.$

5 užduotis. Išspręskite lygtį su moduliu. a) $|x-4| = 8$; b) $|x-4| = -8$; c) $|x-4| = 0$.

$|x-2| = 3,$
$x - 2 = 3$ arba $x - 2 = -3,$
$x = 5;$ $x = -1.$

$|x-2| = -3.$
Lygtis sprendinių neturi, nes $|x-2| \geqslant 0$, o $-3 < 0$.

$|x-2| = 0,$
$x - 2 = 0,$
$x = 2.$

4.6. Uždaviniai

433. Iš skaičių -2; -1; 0; 1; 2 išrinkite tuos, kurie yra lygties sprendiniai.

a) $(x-3)^3=-1$; b) $\sqrt{x+5}=2$; c) $4^{x+1}=\frac{1}{4}$; d) $\log_3(x+1)=0$; e) $|x-2|=1$.

434. Išspręskite kubinę lygtį.

a) $(x+2)^3=8$; b) $(x+5)^3=27$; c) $(x-4)^3=1$; d) $(x-1)^3=125$;

e) $(x+1)^3=-8$; f) $(x+10)^3=-1$; g) $(x-2)^3=0$; h) $(x+4)^3=0$;

i) $(x-2)^3=\frac{1}{8}$; j) $(x+5)^3=\frac{1}{27}$; k) $(x-4)^3=-\frac{1}{8}$; l) $(x+3)^3=-\frac{1}{27}$;

m) $\left(x-\frac{1}{3}\right)^3=1$; n) $\left(x+\frac{1}{4}\right)^3=8$; o) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^3=-27$; p) $\left(x+\frac{1}{4}\right)^3=-8$.

435. Išspręskite iracionaliąją lygtį.

a) $\sqrt{x+2}=3$; b) $\sqrt{x+2}=1$; c) $\sqrt{x-5}=4$; d) $\sqrt{x-4}=6$;

e) $\sqrt{x+5}=0$; f) $\sqrt{x-8}=0$; g) $\sqrt{x+2}=-1$; h) $\sqrt{x-3}=-4$;

i) $\sqrt{x+1}=0{,}1$; j) $\sqrt{x-4}=1{,}2$; k) $\sqrt{x+6}=-0{,}1$; l) $\sqrt{x-7}=-2{,}3$;

m) $\sqrt{x+\frac{1}{5}}=2$; n) $\sqrt{x-\frac{1}{3}}=4$; o) $\sqrt{x+\frac{1}{4}}=-3$; p) $\sqrt{x-\frac{1}{5}}=-14$.

436. Išspręskite rodiklinę lygtį.

a) $2^{x+1}=8$; b) $3^{x-2}=9$; c) $2^{x+3}=1$; d) $3^{x-1}=1$;

e) $5^{x+3}=0$; f) $4^{x-2}=0$; g) $3^{x+5}=-3$; h) $5^{x-1}=-25$;

i) $2^{x+4}=\frac{1}{4}$; j) $3^{x-5}=\frac{1}{9}$; k) $10^{x+2}=0{,}01$; l) $2^{x-3}=0{,}5$;

m) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+4}=\frac{3}{2}$; n) $\left(\frac{3}{5}\right)^{x-2}=\frac{5}{3}$; o) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x+1}=\frac{9}{16}$; p) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-5}=\frac{8}{27}$.

437. Išspręskite logaritminę lygtį.

a) $\log_2(x+4)=3$; b) $\log_2(x+1)=2$; c) $\log_4(x-3)=1$; d) $\log_5(x-2)=2$;

e) $\log_3(x+1)=0$; f) $\log_4(x-2)=0$; g) $\log_2(x+6)=-1$; h) $\log_3(x-4)=-2$;

i) $\log_4(x+3)=\frac{1}{2}$; j) $\log_{25}(x+2)=\frac{1}{2}$; k) $\log_{36}(x-1)=\frac{1}{2}$; l) $\log_8(x-5)=\frac{1}{3}$;

m) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)=2$; n) $\log_{\frac{2}{3}}(x-1)=1$; o) $\log_{\frac{1}{4}}(x+5)=-2$; p) $\log_{\frac{3}{4}}(x-1)=-2$.

438. Išspręskite lygtį su moduliu.

a) $|x+4|=2$; b) $|x+2|=5$; c) $|x-6|=10$; d) $|x-7|=1$;

e) $|x+6|=0$; f) $|x-4|=0$; g) $|x+7|=-1$; h) $|x-8|=-2$;

i) $|x+2|=\frac{1}{3}$; j) $|x+3|=\frac{1}{5}$; k) $|x-2|=\frac{2}{7}$; l) $|x-5|=\frac{3}{5}$;

m) $\left|x+\frac{1}{5}\right|=4$; n) $\left|x-\frac{1}{3}\right|=2$; o) $\left|x+\frac{2}{3}\right|=-4$; p) $\left|x-\frac{5}{7}\right|=-1$.

439. Nespręsdami lygties nustatykite, ar ji turi sprendinių.

a) $(x-1)^3=2$; b) $(x+2)^3=\frac{1}{3}$; c) $(x-2)^3=-3$; d) $(x+1)^3=0$;

e) $\sqrt{x-4}=5$; f) $\sqrt{x+1}=\frac{1}{2}$; g) $\sqrt{x-3}=-2$; h) $\sqrt{x+5}=0$;

i) $2^{x-3}=3$; j) $3^{x+2}=\frac{1}{4}$; k) $4^{x-1}=-5$; l) $5^{x+3}=0$;

m) $\log_2(x-3)=5$; n) $\lg(x+1)=\frac{1}{2}$; o) $\lg(x-4)=-1$; p) $\log_3(x+2)=0$;

r) $|x-6|=7$; s) $|x+8|=\frac{1}{5}$; t) $|x-5|=-6$; u) $|x-7|=0$.

440. Jei kubo briaunos ilgį padidintume 2 cm, tai kubo tūris būtų lygus 216 cm^3. Koks pradinio kubo:
a) briaunos ilgis? b) tūris?

4.7. Lygtys su sinusais

Šiame atverstinyje spręsime lygtis $\sin x = a$ ir lygtis, kurias galima pertvarkyti į šį pavidalą.

Užduotis. 1) Raskite lygties $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sprendinį, priklausantį intervalui $[-90°; 90°]$.

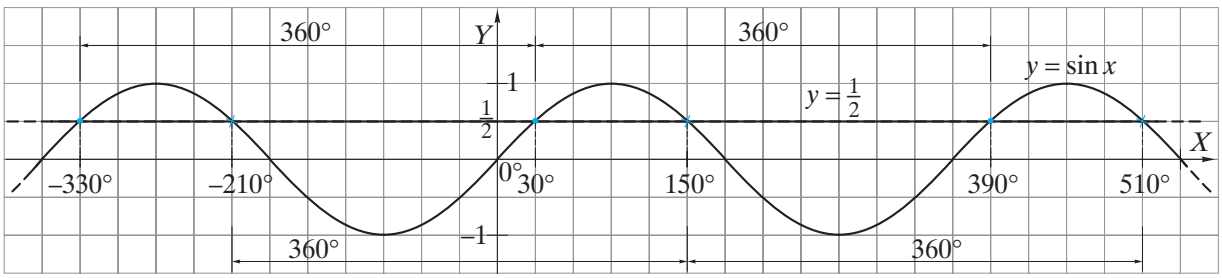
Lygties $\sin x = a$ $(-1 \leqslant a \leqslant 1)$ sprendinys, priklausantis intervalui $[-90°; 90°]$, vadinamas skaičiaus a ***arksinusu***.
Rašoma: $\arcsin a$. *Skaitoma*: arksinusas a.

Raskime lygties $\sin x = \frac{1}{2}$ sprendinį, priklausantį intervalui $[-90°; 90°]$.

Lygties sprendinys yra $x = \arcsin \frac{1}{2}$, $\Rightarrow$ $x = 30°$, nes $\sin 30° = \frac{1}{2}$ ir $30° \in [-90°; 90°]$.

2) Užrašykite visus lygties $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sprendinius, naudodamiesi $y = \sin x$ ir $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ grafikais.

Užrašykime visus lygties $\sin x = \frac{1}{2}$ sprendinius, naudodamiesi $y = \sin x$ ir $y = \frac{1}{2}$ grafikais.
Sinusoidė $y = \sin x$ ir tiesė $y = \frac{1}{2}$ turi be galo daug bendrų taškų. Šių taškų x koordinatės (abscisės) yra lygties $\sin x = \frac{1}{2}$ sprendiniai:
..., $x = -330°$, $x = -210°$, $x = 30°$, $x = 150°$, $x = 390°$, $x = 510°$, ...



Sinusas yra periodinė funkcija. Jos mažiausias teigiamas periodas yra $360°$, t. y. $\sin x = \sin(x + 360°)$. Todėl, jei $x = a$ yra lygties $\sin x = \frac{1}{2}$ sprendinys, tai šios lygties sprendiniai taip pat yra $x + 360° \cdot k$, $k \in \mathbf{Z}$.
Raskime lygties $\sin x = \frac{1}{2}$ sprendinius $360°$ ilgio intervale, pavyzdžiui, intervale $[0°; 360°]$. Šiame intervale lygtis turi du sprendinius: $x_1 = 30°$ ir $x_2 = 150°$.
Visus lygties $\sin x = \frac{1}{2}$ sprendinius galima užrašyti dviem lygybėmis:
$x_1 = 30° + 360° \cdot k$, $k \in \mathbf{Z}$; $x_2 = 150° + 360° \cdot m$, $m \in \mathbf{Z}$.

3) Užrašykite visus lygties $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sprendinius, naudodamiesi arksinuso žymeniu.

Visus lygties $\sin x = \frac{1}{2}$ sprendinius galima užrašyti viena lygybe, naudojantis arksinuso žymeniu:
$x = (-1)^k \cdot \arcsin \frac{1}{2} + 180° \cdot k$, $k \in \mathbf{Z}$,
$x = (-1)^k \cdot 30° + 180° \cdot k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Lygties $\sin x = a$, čia $-1 \leqslant a \leqslant 1$, sprendiniai yra

$$x = (-1)^k \cdot \arcsin a + 180° \cdot k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

4.7. Uždaviniai

441. Apskaičiuokite.

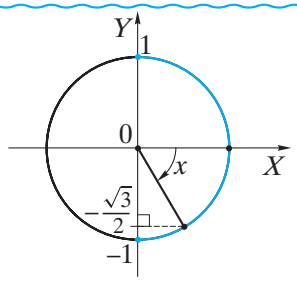
a) $\arcsin\frac{1}{2}$; b) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; d) $\arcsin 1$; e) $\arcsin 0$;

f) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; g) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; h) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; i) $\arcsin(-1)$.

Apskaičiuokime $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Reikia rasti posūkio kampą $x \in [-90°; 90°]$, kurio sinusas lygus $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

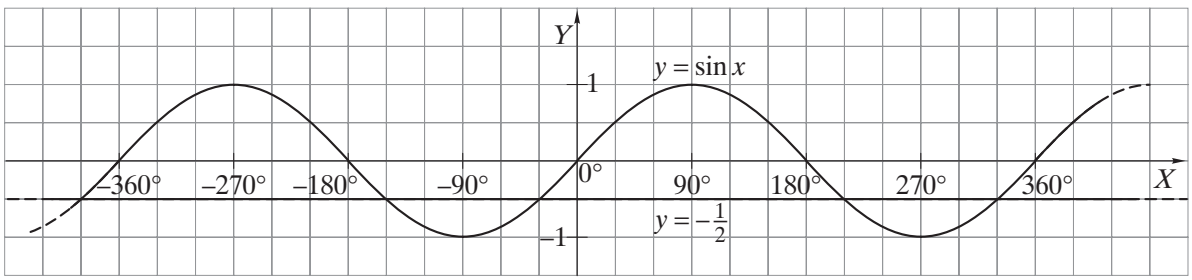
Kadangi $\sin(-60°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ir $-60 \in [-90°; 90°]$, tai $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -60°$.



$\arcsin(-a) = -\arcsin a$.

$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = -60°$.

442. Nubraižyti grafikai $y = \sin x$ ir $y = -\frac{1}{2}$.



Remdamiesi jais, užrašykite lygties $\sin x = -\frac{1}{2}$ sprendinius, priklausančius intervalui:

a) $[-180°; 0°]$; b) $[-90°; 90°]$; c) $[0°; 90°]$; d) $[90°; 270°]$.

443. Raskite lygties $\sin x = a$, kai $x \in [-360°; 360°]$, sprendinius, braižydami grafikus $y = \sin x$ ir $y = a$.

a) $\sin x = \frac{1}{2}$; b) $\sin x = -\frac{1}{2}$; c) $\sin x = 1$; d) $\sin x = -1$; e) $\sin x = 0$.

444. 1) Išspręskite lygtį $\sin x = a$, braižydami grafikus $y = \sin x$ ir $y = a$.

a) $\sin x = 2$; b) $\sin x = -2$; c) $\sin x = -1{,}5$.

2) Ar su visomis a reikšmėmis lygtis $\sin x = a$ turi sprendinių? Užrašykite a reikšmes, su kuriomis lygtis $\sin x = a$ turi sprendinių.

445. 1) Užrašykite lygties sprendinį, priklausantį intervalui $[-90°; 90°]$.

a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

c) $\sin x = -\frac{1}{2}$; d) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) Užrašykite visus nurodytos lygties sprendinius, naudodamiesi arksinuso žymeniu.

$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$x = (-1)^k \cdot \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 180° \cdot k,\ k \in \mathbf{Z}$,

$x = (-1)^k \cdot (-60°) + 180° \cdot k,\ k \in \mathbf{Z}$,

$x = (-1)^k \cdot (-1) \cdot 60° + 180° \cdot k,\ k \in \mathbf{Z}$,

$x = (-1)^{k+1} \cdot 60° + 180° \cdot k,\ k \in \mathbf{Z}$.

446. 1) Raskite lygties sprendinį, priklausantį intervalui $[-90°; 90°]$.

a) $\sin x = 0$; b) $\sin x = 1$; c) $\sin x = -1$.

2) Užrašykite visus nurodytos lygties sprendinius.

447. Išspręskite lygtį.

a) $2\sin x = 0$; b) $2\sin x = 1$; c) $2\sin x = \sqrt{2}$;

d) $-2\sin x = 1$; e) $-2\sin x = \sqrt{2}$; f) $-2\sin x = -\sqrt{3}$.

4.8. Lygtys su kosinusais

Šiame atverstinyje spręsime lygtis $\cos x = a$ ir lygtis, kurias galima pertvarkyti į šį pavidalą.



Užduotis. 1) Raskite lygties $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sprendinį, priklausantį intervalui $[0°; 180°]$.

Lygties $\cos x = a$ $(-1 \leqslant a \leqslant 1)$ sprendinys, priklausantis intervalui $[0°; 180°]$, vadinamas skaičiaus a ***arkkòsinusu***.
Rašoma: $\arccos a$. *Skaitoma*: arkkosinusas a.

Raskime lygties $\cos x = \frac{1}{2}$ sprendinį, priklausantį intervalui $[0°; 180°]$.

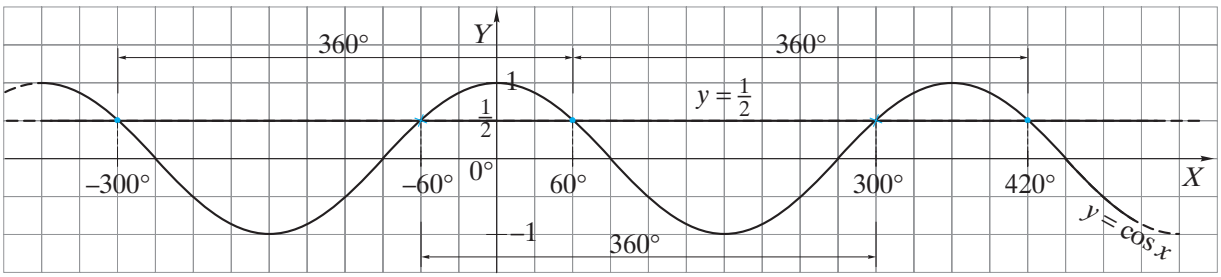
Lygties sprendinys yra $x = \arccos \frac{1}{2}$, $\Rightarrow$ $x = 60°$, nes $\cos 60° = \frac{1}{2}$ ir $60° \in [0°; 180°]$.

2) Užrašykite visus lygties $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sprendinius, naudodamiesi $y = \cos x$ ir $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ grafikais.

Užrašykime visus lygties $\cos x = \frac{1}{2}$ sprendinius, naudodamiesi $y = \cos x$ ir $y = \frac{1}{2}$ grafikais.

Kosinusoidė $y = \cos x$ ir tiesė $y = \frac{1}{2}$ turi be galo daug bendrų taškų. Šių taškų x koordinatės (abscisės) yra lygties $\cos x = \frac{1}{2}$ sprendiniai:

..., $x = -300°$, $x = -60°$, $x = 60°$, $x = 300°$, $x = 420°$, ...



Kosinusas yra periodinė funkcija. Jos mažiausias teigiamas periodas yra $360°$, t. y.
$\cos x = \cos(x + 360°)$.
Todėl, jei $x = a$ yra lygties $\cos x = \frac{1}{2}$ sprendinys, tai šios lygties sprendiniai taip pat yra
$x + 360° \cdot k$, $k \in \mathbf{Z}$.
Raskime lygties $\cos x = \frac{1}{2}$ sprendinius $360°$ ilgio intervale, pavyzdžiui, intervale $[-180°; 180°]$.
Šiame intervale lygtis turi du sprendinius: $x_1 = -60°$, $x_2 = 60°$.
Visus lygties $\cos x = \frac{1}{2}$ sprendinius galima užrašyti dviem lygybėmis:
$x_1 = -60° + 360° \cdot k$, $k \in \mathbf{Z}$; $x_2 = 60° + 360° \cdot m$, $m \in \mathbf{Z}$.

3) Užrašykite visus lygties $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sprendinius, naudodamiesi arkkosinuso žymeniu.

Visus lygties $\cos x = \frac{1}{2}$ sprendinius galima užrašyti viena lygybe, naudojantis arkkosinuso žymeniu:
$x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 360° \cdot k$, $k \in \mathbf{Z}$,
$x = \pm 60° + 360° \cdot k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Lygties $\cos x = a$, čia $-1 \leqslant a \leqslant 1$, sprendiniai yra

$$x = \pm \arccos a + 360° \cdot k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

4.8. Uždaviniai

448. Apskaičiuokite.

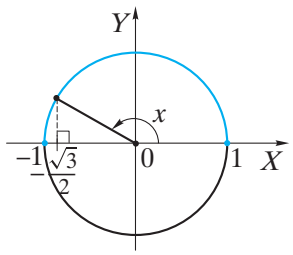
a) $\arccos\frac{1}{2}$; b) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; d) $\arccos 1$; e) $\arccos 0$;

f) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$; g) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; h) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; i) $\arccos(-1)$;

Apskaičiuokime $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Reikia rasti posūkio kampą $x \in [0°; 180°]$, kurio kosinusas lygus $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

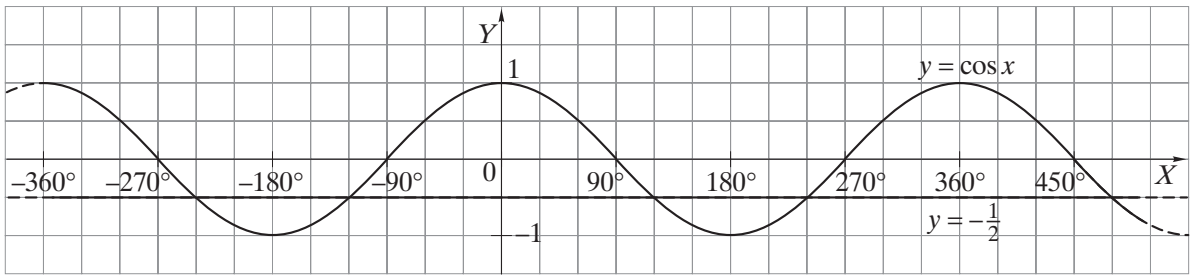
Kadangi $\cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ir $150° \in [0°; 180°]$, tai $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 150°$.



$\arccos(-a) = 180° - \arccos a$.

$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 180° - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = 180° - 30° = 150°$.

449. Nubraižyti grafikai $y = \cos x$ ir $y = -\frac{1}{2}$.



Remdamiesi jais, užrašykite lygties $\cos x = -\frac{1}{2}$ sprendinius, priklausančius intervalui:

a) $[-180°; 0°]$; b) $[-90°; 90°]$; c) $[0°; 180°]$; d) $[90°; 270°]$.

450. Raskite lygties $\cos x = a$, kai $x \in [-360°; 360°]$, sprendinius, braižydami grafikus $y = \cos x$ ir $y = a$.

a) $\cos x = \frac{1}{2}$; b) $\cos x = -\frac{1}{2}$; c) $\cos x = 1$; d) $\cos x = -1$; e) $\cos x = 0$.

451. 1) Išspręskite lygtį $\cos x = a$, braižydami grafikus $y = \cos x$ ir $y = a$.

a) $\cos x = 2$; b) $\cos x = -2$; c) $\cos x = -1{,}5$.

2) Ar su visomis a reikšmėmis lygtis $\cos x = a$ turi sprendinių? Užrašykite a reikšmes, su kuriomis lygtis $\cos x = a$ turi sprendinių.

452. 1) Užrašykite lygties sprendinį, priklausantį intervalui $[0°; 180°]$.

a) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

c) $\cos x = -\frac{1}{2}$; d) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) Užrašykite visus nurodytos lygties sprendinius, naudodamiesi arkkosinuso žymeniu.

$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$x = \pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 360° \cdot k,\ k \in \mathbf{Z}$,

$x = \pm\left(180° - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 360° \cdot k,\ k \in \mathbf{Z}$,

$x = \pm(180° - 30°) + 360° \cdot k,\ k \in \mathbf{Z}$,

$x = \pm 150° + 360° \cdot k,\ k \in \mathbf{Z}$.

453. 1) Raskite lygties sprendinį, priklausantį intervalui $[0°; 180°]$.

a) $\cos x = 1$; b) $\cos x = 0$; c) $\cos x = -1$.

2) Užrašykite visus nurodytos lygties sprendinius.

454. Išspręskite lygtį.

a) $2\cos x = 0$; b) $2\cos x = 1$; c) $2\cos x = \sqrt{2}$;

d) $-2\cos x = 1$; e) $-2\cos x = \sqrt{2}$; f) $-2\cos x = -\sqrt{2}$.

4.9. Lygtys su tangentais

Šiame atverstinyje spręsime lygtis $\operatorname{tg} x = a$ ir lygtis, kurias galima pertvarkyti į šį pavidalą.

Užduotis. 1) Raskite lygties $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ sprendinį, priklausantį intervalui $(-90°; 90°)$.

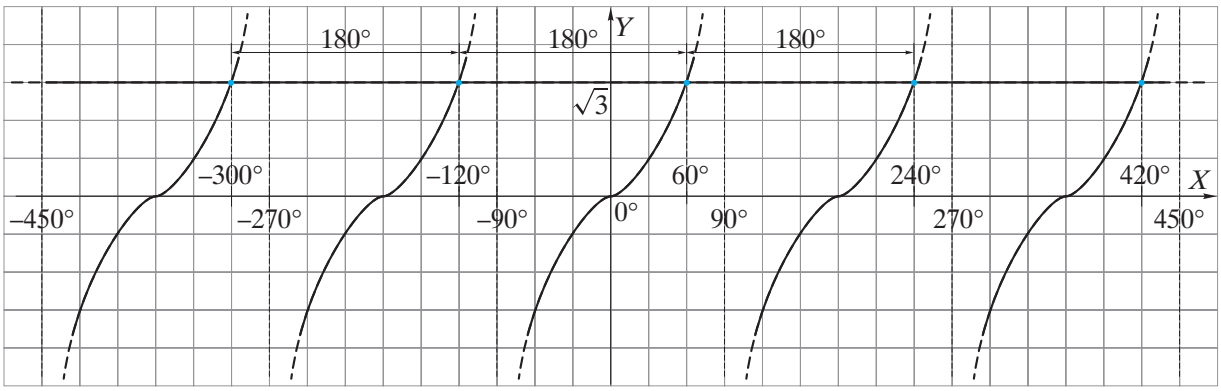
Lygties $\operatorname{tg} x = a$ $(a \in \boldsymbol{R})$ sprendinys, priklausantis intervalui $(-90°; 90°)$, vadinamas skaičiaus a ***arktángentu***.
Rašoma: $\operatorname{arctg} a$. *Skaitoma*: arktangentas a.

Raskime lygties $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ sprendinį, priklausantį intervalui $(-90°; 90°)$.
Šios lygties sprendinys yra $x = \operatorname{arctg} \sqrt{3}$, $\Rightarrow$ $x = 60°$, nes $\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$ ir $60° \in (-90°; 90°)$.

2) Užrašykite visus lygties $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ sprendinius, naudodamiesi $y = \operatorname{tg} x$ ir $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$ grafikais.

Užrašykime visus lygties $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ sprendinius, naudodamiesi $y = \operatorname{tg} x$ ir $y = \sqrt{3}$ grafikais.
Tangentoidė $y = \operatorname{tg} x$ ir tiesė $y = \sqrt{3}$ turi be galo daug bendrų taškų. Šių taškų x koordinatės yra lygties $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ sprendiniai:

..., $x = -300°$, $x = -120°$, $x = 60°$, $x = 240°$, $x = 420°$, ...



Tangentas yra periodinė funkcija. Jos mažiausias teigiamas periodas yra $180°$, t. y.
$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + 180°)$.
Todėl, jei $x = a$ yra lygties $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ sprendinys, tai šios lygties sprendiniai taip pat yra $x + 180° \cdot k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.
Lygties $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ sprendinys intervale $(-90°; 90°)$ yra $x = 60°$.
Visus lygties $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ sprendinius galima užrašyti taip:
$x = 60° + 180° \cdot k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

3) Užrašykite visus lygties $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ sprendinius, naudodamiesi arktangento žymeniu.

Visus lygties $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ sprendinius galima užrašyti naudojantis arktangento žymeniu:
$x = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + 180° \cdot k$, $k \in \boldsymbol{Z}$,
$x = 60° + 180° \cdot k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

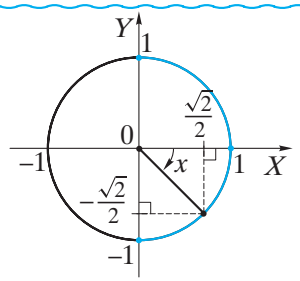
Lygties $\operatorname{tg} x = a$ sprendiniai yra

$$x = \operatorname{arctg} a + 180° \cdot k, \quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

455. Apskaičiuokite.

a) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$; b) $\operatorname{arctg}1$; c) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$; d) $\operatorname{arctg}0$; e) $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$; f) $\operatorname{arctg}(-1)$; g) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

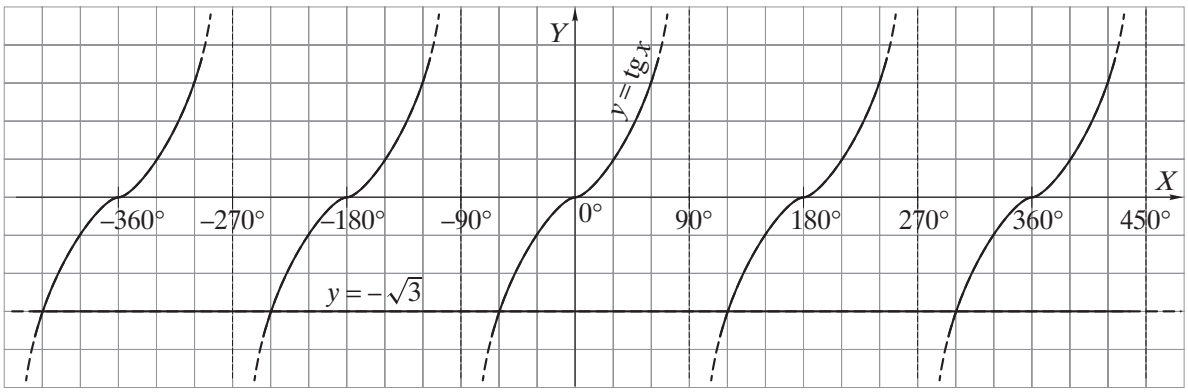
Apskaičiuokime $\operatorname{arctg}(-1)$.
Reikia rasti posūkio kampą $x \in (-90°; 90°)$, kurio tangentas lygus -1.
Kadangi $\operatorname{tg}(-45°) = -1$ ir $-45° \in (-90°; 90°)$, tai $\operatorname{arctg}(-1) = -45°$.



$\operatorname{arctg}(-\alpha) = -\operatorname{arctg}\alpha$.

$\operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg}1 = -45°$.

456. Nubraižyti grafikai $y = \operatorname{tg}x$ ir $y = -\sqrt{3}$.



Remdamiesi jais, užrašykite lygties $\operatorname{tg}x = -\sqrt{3}$ sprendinius, priklausančius intervalui:

a) $(-270°; -90°)$; b) $(-90°; 90°)$; c) $(90°; 270°)$.

457. Raskite lygties $\operatorname{tg}x = a$, kai $x \in (-270°; 270°)$ sprendinius, braižydami grafikus $y = \operatorname{tg}x$ ir $y = a$.

a) $\operatorname{tg}x = \sqrt{3}$; b) $\operatorname{tg}x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; c) $\operatorname{tg}x = 1$; d) $\operatorname{tg}x = -1$; e) $\operatorname{tg}x = 0$.

458. 1) Išspręskite lygtį $\operatorname{tg}x = a$, braižydami grafikus $y = \operatorname{tg}x$ ir $y = a$.
a) $\operatorname{tg}x = 2$; b) $\operatorname{tg}x = -2$; c) $\operatorname{tg}x = -1{,}5$.
2) Ar su visomis a reikšmėmis lygtis $\operatorname{tg}x = a$ turi sprendinių?

459. 1) Užrašykite lygties sprendinį, priklausantį intervalui $(-90°; 90°)$.
a) $\operatorname{tg}x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; b) $\operatorname{tg}x = \sqrt{3}$;
c) $\operatorname{tg}x = -\sqrt{3}$; d) $\operatorname{tg}x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.
2) Užrašykite visus nurodytos lygties sprendinius, naudodamiesi arktangento žymeniu.

$\operatorname{tg}x = -1$,
$x = \operatorname{arctg}(-1) + 180° \cdot k,\ k \in \mathbf{Z}$,
$x = -\operatorname{arctg}1 + 180° \cdot k,\ k \in \mathbf{Z}$,
$x = -45° + 180° \cdot k,\ k \in \mathbf{Z}$.

460. 1) Raskite lygties sprendinį, priklausantį intervalui $(-90°; 90°)$.
a) $\operatorname{tg}x = 1$; b) $\operatorname{tg}x = 0$; c) $\operatorname{tg}x = -1$.
2) Užrašykite visus nurodytos lygties sprendinius.

461. Išspręskite lygtį.

a) $3\operatorname{tg}x = 3$; b) $3\operatorname{tg}x = 0$; c) $3\operatorname{tg}x = \sqrt{3}$;
d) $-3\operatorname{tg}x = 3$; e) $-3\operatorname{tg}x = \sqrt{3}$; f) $-\operatorname{tg}x = -\sqrt{3}$.

Apibendriname

Lygtys

Lygybės $f(x) = a$ ir $f(x) = g(x)$ vadinamos *lygtimìs su víenu nežinomúoju* x; čia $f(x)$ ir $g(x)$ — reiškiniai, a — skaičius.

Nežinomojo reikšmė, su kuria lygtis virsta teisinga skaitine lygybe, vadinama *lygtiẽs spréndiniu*.

Išsprę́sti lỹgtį — reiškia rasti visus jos sprendinius arba įsitikinti, kad lygtis sprendinių neturi.
Išsprendus lygtį, visada pravartu pasitikrinti, ar gautosios nežinomojo reikšmės tinka lygčiai.

Kubinės lygtys

Lygtys, kuriose nežinomasis yra pakeltas kubu (trečiuoju laipsniu), vadinamos *kùbinėmis lygtimìs*.

Kubinė lygtis $x^3 = a$ turi vienintelį sprendinį $x = \sqrt[3]{a}$.

Kubinės lygties $ax^3 + b = c$ $(a \neq 0)$ sprendimas:

$ax^3 + b = c,$
$ax^3 = c - b,$
$x^3 = \frac{c-b}{a},$
$x = \sqrt[3]{\frac{c-b}{a}}.$

Iracionaliosios lygtys

Lygtys, kuriose nežinomasis yra po šaknies ženklu, vadinamos *iracionaliõsiomis lygtimìs*.

Iracionalioji lygtis $\sqrt{x} = a$:
- turi vienintelį sprendinį $x = a^2$, kai $a \geqslant 0$;
- neturi sprendinių, kai $a < 0$.

Iracionaliosios lygties $a\sqrt{x} + b = c$ $(a \neq 0)$ sprendimas:

$a\sqrt{x} + b = c,$
$a\sqrt{x} = c - b,$
$\sqrt{x} = \frac{c-b}{a};$
kai $\frac{c-b}{a} \geqslant 0$, tai $x = \left(\frac{c-b}{a}\right)^2;$
kai $\frac{c-b}{a} < 0$, tai lygtis sprendinių neturi.

Rodiklinės lygtys

Lygtys, kuriose nežinomasis yra laipsnio rodiklyje, vadinamos *rodìklinėmis lygtimìs*.

Rodiklinė lygtis $a^x = b$ $(a > 0,\ a \neq 1)$:
- turi vienintelį sprendinį $x = \log_a b$, kai $b > 0$;
- neturi sprendinių, kai $b \leqslant 0$.

Rodiklinės lygties $b \cdot a^x + c = d$ $(b \neq 0)$ sprendimas:

$b \cdot a^x + c = d,$
$b \cdot a^x = d - c,$
$a^x = \frac{d-c}{b};$
kai $\frac{d-c}{b} > 0$, tai $x = \log_a\left(\frac{d-c}{b}\right);$
kai $\frac{d-c}{b} \leqslant 0$, tai lygtis sprendinių neturi.

$x^3 = -8,\quad \sqrt{x} = 2x - 6,\quad 3^{x-1} = 9,$
$3 \cdot \log_2 x = 6,\quad |x| + 3 = 1$ — lygtys.

Skaičius -2 yra lygties $x^3 = -8$ sprendinys, nes lygybė $(-2)^3 = -8$ yra teisinga.

$x^3 = -8, \Rightarrow x = \sqrt[3]{-8},\quad x = -2.$
Pasitikriname: kai $x = -2$, tai $x^3 = (-2)^3 = -8$.
Atsakymas. $x = -2$.

$x^3 = 5,\quad 2x^3 = -16,\quad 2x^3 - 4 = -20$ — kubinės lygtys.

$x^3 = 5, \Rightarrow x = \sqrt[3]{5}.$

$2x^3 - 4 = -20,$
$2x^3 = -16,$
$x^3 = -8,$
$x = -2.$

$\sqrt{x} = 3,\quad \sqrt{x} = -4,\quad 3\sqrt{x} - 2 = 10$ — iracionaliosios lygtys.

$\sqrt{x} = 3, \Rightarrow x = 3^2,\quad x = 9.$
Lygtis $\sqrt{x} = -4$ sprendinių neturi.

$3\sqrt{x} - 2 = 10,$	$3\sqrt{x} - 2 = -14,$
$3\sqrt{x} = 12,$	$3\sqrt{x} = -12,$
$\sqrt{x} = 4,$	$\sqrt{x} = -4,$
$x = 16.$	sprendinių nėra.

$2^x = 7,\quad 3^x = -2,\quad 2 \cdot 3^x - 5 = 13$ — rodiklinės lygtys.

$2^x = 7, \Rightarrow x = \log_2 7.$
Lygtis $3^x = -2$ sprendinių neturi.

$2 \cdot 3^x - 5 = 13,$	$2 \cdot 3^x - 5 = -9,$
$2 \cdot 3^x = 18,$	$2 \cdot 3^x = -4,$
$3^x = 9,$	$3^x = -2,$
$x = 2.$	sprendinių nėra.

Logaritminės lygtys

Lygtys, kuriose nežinomasis yra po logaritmo ženklu, vadinamos *logarìtminėmis lygtimìs*.

Logaritminė lygtis $\log_a x = b$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ turi vienintelį sprendinį $x = a^b$.

Logaritminės lygties $b \cdot \log_a x + c = d$ $(b \neq 0)$ sprendimas:

$b \cdot \log_a x + c = d,$

$b \cdot \log_a x = d - c,$

$\log_a x = \frac{d-c}{b},$

$x = a^{\frac{d-c}{b}}.$

Lygtys su moduliais

Lygtys, kuriose nežinomasis yra po modulio ženklu, vadinamos *lygtimìs su mòduliais*.

Lygtis $|x| = a$:

- turi du sprendinius $x_1 = a$, $x_2 = -a$, kai $a > 0$;
- turi vieną sprendinį $x = 0$, kai $a = 0$;
- neturi sprendinių, kai $a < 0$.

Lygties su moduliu $a \cdot |x| + b = c$ $(a \neq 0)$ sprendimas:

$a \cdot |x| + b = c,$

$a \cdot |x| = c - b,$

$|x| = \frac{c-b}{a};$

kai $\frac{c-b}{a} > 0$, tai $x_1 = \frac{c-b}{a}$, $x_2 = -\frac{c-b}{a};$

kai $\frac{c-b}{a} = 0$, tai $x = 0;$

kai $\frac{c-b}{a} < 0$, tai lygtis sprendinių neturi.

Trigonometrinės lygtys

Lygtys, kuriose nežinomasis yra po sin, cos ar tg ženklu, vadinamos *trigonomètrinėmis lygtimìs*.

Lygtis $\sin x = a$:

- turi be galo daug sprendinių
  $x = (-1)^k \cdot \arcsin a + 180° \cdot k,\ k \in \mathbf{Z},$
  kai $-1 \leqslant a \leqslant 1;$
- neturi sprendinių, kai $a < -1$ arba $a > 1$.

Lygtis $\cos x = a$:

- turi be galo daug sprendinių
  $x = \pm \arccos a + 360° \cdot k,\ k \in \mathbf{Z},$
  kai $-1 \leqslant a \leqslant 1;$
- neturi sprendinių, kai $a < -1$ arba $a > 1$.

Lygtis $\operatorname{tg} x = a$ turi be galo daug sprendinių $x = \operatorname{arctg} a + 180° \cdot k,\ k \in \mathbf{Z}.$

$\log_3 x = 2$, $2 \cdot \log_3 x + 4 = 8$ — logaritminės lygtys.

$\log_3 x = 2, \Rightarrow x = 3^2, \quad x = 9.$

$2 \cdot \log_3 x + 4 = 8,$
$2 \cdot \log_3 x = 4,$
$\log_3 x = 2,$
$x = 9.$

$2 \cdot \log_3 x + 4 = 2,$
$2 \cdot \log_3 x = -2,$
$\log_3 x = -1,$
$x = \frac{1}{3}.$

$|x| = 4$, $|x| = 0$, $|x| = -1$, $2 \cdot |x| - 3 = 5$ — lygtys su moduliais.

$|x| = 4, \Rightarrow x_1 = -4, \quad x_2 = 4.$
$|x| = 0, \Rightarrow x = 0.$
Lygtis $|x| = -3$ sprendinių neturi.

$2 \cdot |x| - 3 = 5,$
$2 \cdot |x| = 8,$
$|x| = 4,$
$x_1 = 4,$
$x_2 = -4.$

$2 \cdot |x| + 3 = 3,$
$2 \cdot |x| = 0,$
$|x| = 0,$
$x = 0.$

$2 \cdot |x| + 3 = 1,$
$2 \cdot |x| = -2,$
$|x| = -1,$
sprendinių nėra.

$\sin x = \frac{1}{2}$, $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ — trigonometrinės lygtys.

$\sin x = \frac{1}{2},$
$x = (-1)^k \cdot \arcsin \frac{1}{2} + 180° \cdot k,$
$x = (-1)^k \cdot 30° + 180° \cdot k,\ k \in \mathbf{Z}.$

Lygtis $\sin x = -2$ sprendinių neturi.

$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2},$
$x = \pm \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} + 360° \cdot k,$
$x = \pm 45° + 360° \cdot k,\ k \in \mathbf{Z}.$

Lygtis $\cos x = 2$ sprendinių neturi.

$\operatorname{tg} x = \sqrt{3},$
$x = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + 180° \cdot k,$
$x = 60° + 180° \cdot k,\ k \in \mathbf{Z}.$

462. Išspręskite kubinę lygtį.

a) $(x+2)^3=27$; b) $(3-x)^3=8$; c) $(x-2)^3=-8$;
d) $(3x+4)^3=64$; e) $(1-4x)^3=125$; f) $(5x-7)^3=-27$;
g) $(3x+1)^3=0{,}001$; h) $(5-2x)^3=0{,}027$; i) $(3x-4)^3=-0{,}125$;
j) $(2x+6)^3=\frac{1}{8}$; k) $(3-2x)^3=\frac{1}{1000}$; l) $(4x-1)^3=-\frac{1}{64}$.

$(5x-7)^3=27,$
$5x-7=\sqrt[3]{27},$
$5x-7=3,$
$5x=10,$
$x=2.$

463. Raskite kubinės lygties sprendinį.

a) $(x^2+x-5)^3=1$; b) $(x^2-7x+10)^3=-8$;
c) $(x^2-10x+27)^3=8$; d) $(x^2+8x+16)^3=0$;
e) $(x^2+x+8)^3=27$; f) $(x^2-6x+20)^3=-1$.

$(x^2-x-5)^3=-27,$
$x^2-x-5=-3,$
$x^2-x-2=0,$
$D=9,\ x_1=-1,\ x_2=2.$

464. Išspręskite iracionaliąją lygtį.

a) $\sqrt{x+1}=2$; b) $\sqrt{x-5}=3$; c) $\sqrt{4-x}=0$;
d) $\sqrt{7x+2}=4$; e) $\sqrt{3x-2}=5$; f) $\sqrt{8-2x}=-1$;
g) $\sqrt{2x+9}=2$; h) $\sqrt{5x-4}=1$; i) $\sqrt{3-4x}=-2$.

$\sqrt{5x+6}=4,$
$5x+6=16,$
$5x=10,$
$x=2.$

465. Raskite lygties sprendinį.

a) $5\sqrt{x+2}=10$; b) $2\sqrt{x+5}=4$; c) $-3\sqrt{4-x}=-12$;
d) $3\sqrt{2x+5}=-9$; e) $4\sqrt{3-2x}=16$; f) $-2\sqrt{6-3x}=-10$;
g) $\frac{1}{2}\sqrt{3x+1}=3$; h) $\frac{1}{3}\sqrt{2x-1}=-1$; i) $-\frac{1}{4}\sqrt{2-4x}=-5$.

$3\sqrt{2-x}=27,$
$\sqrt{2-x}=9,$
$2-x=81,$
$x=-79.$

466. Su kuriomis x reikšmėmis lygybė yra teisinga?

a) $\sqrt{x^2-12}=2$; b) $\sqrt{10-x^2}=1$; c) $\sqrt{12-2x^2}=-2$;
d) $\sqrt{1+5x^2}=9$; e) $\sqrt{46+3x^2}=-11$; f) $\sqrt{8+2x^2}=0$;
g) $\sqrt{x^2-2x+1}=4$; h) $\sqrt{x^2+x+7}=3$; i) $\sqrt{6x^2-2x+40}=-10$.

$\sqrt{50-x^2}=5,$
$50-x^2=25,$
$x^2=25,$
$x_1=-5,\ x_2=5.$

467. Išspręskite rodiklinę lygtį.

a) $2^{5x-7}=8$; b) $3^{2-3x}=9$; c) $4^{2x+1}=16$;
d) $2^{-x+3}=\frac{1}{16}$; e) $3^{-x-2}=\frac{1}{27}$; f) $4^{-3x-4}=\frac{1}{4}$;
g) $8^{4+x}=1$; h) $9^{4-3x}=1$; i) $5^{-2x-5}=1$;
j) $3^{2x+1}=0$; k) $4^{5-2x}=-1$; l) $3^{-2x-7}=-\frac{1}{2}$.

$3^{2x-1}=81,$
$3^{2x-1}=3^4,$
$2x-1=4,$
$2x=5,$
$x=2{,}5.$

468. Raskite lygties sprendinius.

a) $2^{x^2}=16$; b) $3^{x^2}=27$; c) $5^{x^2}=1$;
d) $2^{x^2-9}=8$; e) $6^{x^2+1}=\frac{1}{36}$; f) $7^{16-x^2}=1$;
g) $2^{x^2+3x-2}=4$; h) $5^{x^2-x-3}=125$; i) $4^{x^2+8x+15}=1$;
j) $2^{x^2-3x+5}=0$; k) $4^{x^2-2x+3}=\frac{1}{4}$; l) $3^{x^2-2x+1}=1$.

$5^{x^2-4x+5}=25,$
$5^{x^2-4x+5}=5^2,$
$x^2-4x+5=2,$
$x^2-4x+3=0,$
$x_1=1,\quad x_2=3.$

469. Su kuriomis x reikšmėmis lygybė yra teisinga?

a) $9^x = 3$; b) $16^{2x} = 2$; c) $16^{3+x} = 4$;
d) $0{,}2^x = 125$; e) $0{,}1^{3x} = 100$; f) $0{,}25^{x+1} = 2$;
g) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 2$; h) $\left(\frac{1}{27}\right)^{2x} = 3$; i) $\left(\frac{1}{9}\right)^{x-2} = 27$;
j) $2^{x-2} = 8^{3x}$; k) $4^x = 8^{2-x}$; l) $9^{4x} = 27^{2x-3}$.

$25^{2x} = 125^{x-3}$,
$(5^2)^{2x} = (5^3)^{x-3}$,
$5^{4x} = 5^{3x-9}$,
$4x = 3x - 9$,
$x = -9$.

470. Išspręskite logaritminę lygtį.

a) $\log_5(x-1) = 3$; b) $\log_6(x-2) = 0$; c) $\log_4(x+2) = -1$;
d) $\log_3(2x-1) = 2$; e) $\log_4(3-5x) = 0$; f) $\log_5(1+5x) = -1$;
g) $\log_2\left(x^2+2x\right) = 3$; h) $\log_3\left(2x-x^2\right) = 2$; i) $\lg\left(-x^2-2x\right) = 0$.

$\log_3(2x-3) = 2$,
$2x - 3 = 3^2$,
$2x = 12$,
$x = 6$.

471. Išspręskite lygtį.

a) $\log_2(4x-8) = \log_2(x+1)$; b) $\log_{\frac{1}{5}}(3x-5) = \log_{\frac{1}{5}}(x+1)$; c) $\log_3\left(x^2-2x\right) = \log_3 8$;
d) $\log_5\left(x^2-x\right) = \log_5 12$; e) $\log_3(2x-4) = \log_3(4x)$; f) $\log_5(3x-8) = \log_5(4x)$;
g) $\lg\left(x^2+3\right) = \lg(4x)$; h) $\lg\left(x^2+4\right) = \lg(5x)$; i) $\lg\left(x^2+6\right) = \lg(5x)$.

Išspręskime lygtį $\lg(8-3x) = \lg(x-4)$.
Logaritmai tuo pačiu pagrindu yra lygūs, kai lygūs jų reiškiniai. Todėl ieškome x reikšmių, su kuriomis
$8 - 3x = x - 4, \quad \Rightarrow \quad 4x = 12, \quad x = 3.$
Žinome, kad $\log_a b$ turi prasmę, kai $a > 0$, $a \neq 1$ ir $b > 0$.
Bet kai $x = 3$, tai $8 - 3x = 8 - 3 \cdot 3 = -1 < 0$ (ir $x - 4 = 3 - 4 = -1 < 0$).
Vadinasi, lygtis $\lg(8-3x) = \lg(x-4)$ sprendinių neturi.

472. Įsitikinkite, kad lygtis sprendinių neturi.

a) $\log_5(x-10) = \log_5(4-x)$; b) $\log_{0,2}(3x-9) = \log_{0,2}(1-x)$; c) $\lg(6-x) = \lg(x-7)$;
d) $\lg(10-2x) = \lg(x-9)$; e) $\log_2\left(x^2+2x\right) = \log_2(-3+2x)$; f) $\lg\left(x^2+x\right) = \lg(2x-5)$.

473. Išspręskite lygtį su moduliu.

a) $|x-3| = 4$; b) $|2x+10| = 7$;
c) $|3x-4| = 0$; d) $|2-5x| = -1$;
e) $\left|x^2-3\right| = 1$; f) $\left|9x^2-1\right| = 8$;
g) $\left|3-x^2\right| = 0$; h) $\left|5-2x^2\right| = -3$.

$|x^2 - 5| = 4$,
$x^2 - 5 = 4$, arba $x^2 - 5 = -4$,
$x^2 = 9$, $x^2 = 1$,
$x_1 = -3$, $x_2 = 3$; $x_3 = -1$, $x_4 = 1$.

474. Išspręskite lygtį.

a) $\sin(3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\cos(5x) = \frac{1}{2}$;
c) $\operatorname{tg}(2x) = 1$; d) $\sin\left(\frac{x}{5}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
e) $\cos\left(\frac{x}{4}\right) = -\frac{1}{2}$; f) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = -4$.

$\sin(2x) = \frac{1}{2}$,
$2x = (-1)^k \cdot \arcsin\frac{1}{2} + 180° \cdot k, \quad k \in \mathbf{Z}$,
$2x = (-1)^k \cdot 30° + 180° \cdot k, \quad k \in \mathbf{Z}$,
$x = (-1)^k \cdot 15° + 90° \cdot k, \quad k \in \mathbf{Z}$.

475. Į kiekvieną pavaizduoto kvadrato langelį įrašomas vienas iš skaičių 1, 2, 3 taip, kad kiekvienoje eilutėje ir kiekviename stulpelyje būtų kiekvienas šių skaičių. Valentinas jau pradėjo pildyti lentelę. Koks skaičius galėtų būti parašytas vietoj klaustuko?

1	?	
2	1	

Šiek tiek apie lygtis, jų apibrėžimo sritis ir ekvivalentumą

Sprendžiant įvairius uždavinius, dažnai tenka sudaryti reiškinius su kintamaisiais ir ieškoti tų kintamųjų reikšmių, su kuriomis tie reiškiniai įgyja tas pačias reikšmes. Sulyginę tuos reiškinius, sudarome lygtį. Reiškinių kintamuosius vadiname *lygtiẽs nežinomaĩsiais*.

Panagrinėkime lygtis su vienu nežinomuoju x. Jas galima užrašyti taip:

$$f(x) = g(x);$$

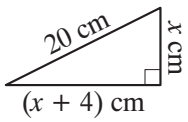
čia $f(x)$, $g(x)$ — reiškiniai su vienu kintamuoju x, kurį vadiname lygties nežinomuoju.
Dažnai vienas reiškinys, t. y. $f(x)$ ar $g(x)$, būna tiesiog skaičius.

Pavyzdžiui, sudarykime lygtį tokiam uždaviniui išspręsti:

Stačiojo trikampio vienas statinis yra 4 *cm trumpesnis už kitą, o įžambinė lygi* 20 *cm. Apskaičiuokite trikampio statinių ilgius.*

Sakykime, kad trumpesnysis statinis lygus x cm. Tada ilgesnysis statinis lygus $(x+4)$ cm. Pagal Pitagoro teoremą

$$x^2 + (x+4)^2 = 20^2.$$



Sudarėme lygtį su vienu nežinomuoju x. Jos kairiojoje pusėje yra reiškinys $f(x) = x^2 + (x+4)^2$, o dešiniojoje — reiškinys $g(x) = 20^2$.

Reiškinys $f(x)$ turi prasmę su visomis x reikšmėmis. Todėl lygties $x^2 + (x+4)^2 = 20^2$ apibrėžimo sritis yra intervalas $(-\infty; +\infty)$, t. y. $x \in (-\infty; +\infty)$.

Lygties $f(x) = g(x)$ nežinomojo reikšmės, su kuriomis reiškiniai $f(x)$ ir $g(x)$ turi prasmę, vadinamos *lygtiẽs apibrėžìmo sritimì*.

1 užduotis.
1) Išspręskite lygtį $x^2 + (x+4)^2 = 20^2$. Kiek sprendinių turi lygtis? Užrašykite juos.

Išspręsti lỹgtį — reiškia rasti visus jos sprendinius arba įsitikinti, kad lygtis sprendinių neturi.

Nežinomojo reikšmės, su kuriomis lygtis virsta teisinga skaitine lygybe, vadinamos *lygtiẽs sprendiniaĩs*.

2) Ar abu lygties sprendiniai tenkina uždavinio sąlygą? Kokie yra trikampio statinių ilgiai?

Lygtys sprendžiamos įvairiai. Paprastai sudėtinga lygtis yra pertvarkoma į paprastesnę, turinčią tuos pačius sprendinius, kaip ir pradinė lygtis.

Dvi lygtys, kurios turi tuos pačius sprendinius arba abi sprendinių neturi, vadinamos *ekvivalenčiõsiomis*.

Pavyzdžiui, lygtys $2x^2 + 8x + 16 = 400$ ir $x^2 + (x+4)^2 = 20^2$ yra ekvivalenčios, nes jų sprendiniai sutampa.

2 užduotis. Išspręskite lygtis $|x| = 3$ ir $x^2 = 9$ ir įsitikinkite, kad jos yra ekvivalenčios.

Sprendžiant lygtį, galima atlikti tokius pertvarkius:

- prie reiškinių, esančių abiejose lygties pusėse, pridėti (iš jų atimti) po tą patį skaičių;
- abiejų lygties pusių reiškinius padauginti (padalyti) iš to paties skaičiaus, nelygaus nuliui.

Atlikę šiuos pertvarkius, gauname lygtį, ekvivalenčią pradinei, todėl lygties sprendiniai nepasikeičia. Šie pertvarkiai vadinami *ekvivalenčiaisiais pértvarkiais*.
Tačiau yra ir tokių lygties pertvarkių, kuriuos atlikę gauname lygtį, kuri nėra ekvivalenti pradinei lygčiai. Pavyzdžiui, prie lygties

$$\frac{x^2-1}{x-1}=1$$

abiejose pusėse esančių reiškinių pridėkime po reiškinį $\frac{1}{x}$. Gausime lygtį

$$\frac{x^2-1}{x-1}+\frac{1}{x}=1+\frac{1}{x}.$$

3 užduotis. Įsitikinkite, kad lygtis $\frac{x^2-1}{x-1}=1$ turi vieną sprendinį $x=0$, o lygtis $\frac{x^2-1}{x-1}+\frac{1}{x}=1+\frac{1}{x}$ sprendinių neturi, t. y. lygtys nėra ekvivalenčios.

Panašiai gali atsitikti ir dauginant arba dalijant abiejų lygties pusių reiškinius iš reiškinio su kintamuoju. Pavyzdžiui, lygtis $2x^2=x$ turi du sprendinius: $x_1=0$ ir $x_2=\frac{1}{2}$ (įsitikinkite). Tačiau, padaliję abiejų pusių reiškinius iš x, gautume lygtį $2x=1$, kuri turi tik vieną sprendinį (raskite jį).

Lygtį, neekvivalenčią pradinei, taip pat galima gauti keliant abiejų lygties pusių reiškinius kvadratu. Pavyzdžiui, išspręskime lygtį $\sqrt{x-2}=\sqrt{1-x}$ abiejų pusių reiškinius keldami kvadratu.

$$\sqrt{x-2}=\sqrt{1-x},\ \big|\uparrow^2$$
$$x-2=1-x,$$
$$x=1\frac{1}{2}.$$

Tačiau $x=1\frac{1}{2}$ nėra lygties $\sqrt{x-2}=\sqrt{1-x}$ sprendinys, nes

$$\text{kai } x=1\frac{1}{2},\ \text{ tai } x-2=1\frac{1}{2}-2=-\frac{1}{2}<0.$$

Taigi kai $x=1\frac{1}{2}$, tai reiškinys $x-2$ yra lygus neigiamajam skaičiui, o kvadratinė šaknis iš neigiamojo skaičiaus neturi prasmės.

Lygtį $\sqrt{x-2}=\sqrt{1-x}$ galima pradėti spręsti ieškant jos apibrėžimo srities. Lygties apibrėžimo sritis yra tos x reikšmės, su kuriomis

$$x-2\geqslant 0 \quad \text{ir} \quad 1-x\geqslant 0.$$

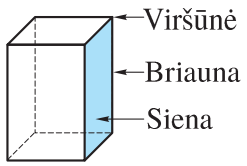
Sprendžiame sistemą:

$$\begin{cases} x-2\geqslant 0,\\ 1-x\geqslant 0;\end{cases}$$
$$\begin{cases} x\geqslant 2,\\ x\leqslant 1.\end{cases}$$

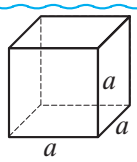
Ši sistema sprendinių neturi. Vadinasi, lygties $\sqrt{x-2}=\sqrt{1-x}$ apibrėžimo sritis — tuščioji aibė ir lygtis sprendinių neturi.

Stačiakampis gretasienis

476. 1) Kiek viršūnių, kiek briaunų ir kiek sienų turi stačiakampis gretasienis?
2) Kiek briaunų išeina iš kiekvienos stačiakampio gretasienio viršūnės?

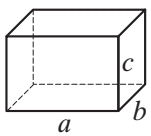


477. Kubo briaunos ilgis yra 5 cm.
Apskaičiuokite kubo:
a) visų briaunų ilgių sumą;
b) vienos sienos plotą;
c) viso paviršiaus plotą;
d) tūrį.



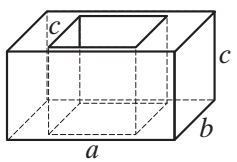
$S_{pav} = 6a^2$,
$V = a^3$.

478. Stačiakampio gretasienio briaunų ilgiai yra 4 cm, 25 mm, 1 dm.
1) Užrašykite stačiakampio gretasienio matmenis centimetrais.
2) Apskaičiuokite stačiakampio gretasienio:
a) visų briaunų ilgių sumą;
b) viso paviršiaus plotą;
c) tūrį.

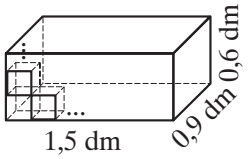


$S_{pav} = 2(ab + bc + ac)$,
$V = abc$.

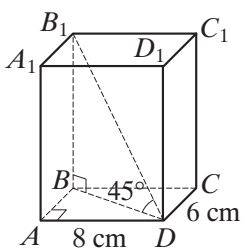
479. Stačiakampyje gretasienyje, kurio matmenys yra $a \times b \times c$, išpjauta kubo formos skylė. Kubo briaunos ilgis yra c.
a) Koks yra gauto kūno tūris?
b) Koks yra gauto kūno viso paviršiaus plotas?
c) Apskaičiuokite gauto kūno tūrį ir viso paviršiaus plotą, jei $a = 5$ dm, $b = 4$ dm, $c = 2$ dm.
d) Kiek kilogramų dažų reikės gautajam kūnui nudažyti, jei 1 cm^2 nudažyti reikia 5 g dažų?



480. Į stačiakampio gretasienio formos dėžę, kurios matmenys nurodyti brėžinyje, vienas šalia kito dedami kubeliai, kurių kiekvieno briaunos ilgis yra 3 cm. Kiek daugiausia kubelių tilps į šią dėžę?



481. Stačiakampio gretasienio pagrindo kraštinių ilgiai yra 8 cm ir 6 cm. Gretasienio įstrižainė su pagrindo plokštuma sudaro 45° kampą. Apskaičiuokite stačiakampio gretasienio:
a) pagrindo įstrižainės BD ilgį;
b) aukštinės BB_1 ilgį;
c) įstrižainės B_1D ilgį.



482. Kubo viso paviršiaus plotas lygus 216 cm^2. Apskaičiuokite kubo:
a) briaunos ilgį; b) tūrį; c) sienos įstrižainės ilgį; d) įstrižainės ilgį.

483. Stačiakampio gretasienio formos akvariumo ilgis yra 1 m, o plotis lygus 50 cm.
1) Koks yra akvariumo aukštis, jei į jį telpa 350 ℓ vandens?
2) Koks yra vandens aukštis akvariume, jei į jį įpilta 250 ℓ vandens?

$1\ \ell = 1\ dm^3$.

Darbo uždaviniai

484. Elzė sprendžia uždavinius. Per vieną valandą ji išsprendžia 6 uždavinius. Kiek uždavinių išspręs Elzė per:

a) 1 valandą? b) 2 valandas? c) 3 valandas? d) 8 valandas? e) t valandų?

f) 30 minučių? g) 20 minučių? h) 10 minučių? i) 1 minutę? j) m minučių?

Darbo formulė: $A = d \cdot t$; čia A — darbas, d — darbo našumas, t — laikas.

Jei per 1 valandą išsprendžiama 8 uždaviniai, tai per 5 valandas išsprendžiama $8 \cdot 5 = 40$ uždavinių.

485. Atsukus čiaupą, baseinas pripildomas vandens per 12 valandų. Kuri baseino dalis bus pripildyta per 1 h? 2 h? 3 h? 4 h? 6 h? 12 h?

486. Per valandą tapetais išklijuojama $\frac{1}{4}$ kambario sienų ploto. Per kiek valandų bus išklijuotos visos kambario sienos?

487. Reikia išspręsti 210 uždavinių. Apskaičiuokite, per kiek laiko šiuos uždavinius išspręstų:
1) Aldas, jei jis per valandą išsprendžia 5 uždavinius;
2) Vaidas, jei jis per valandą išsprendžia 7 uždavinius;
3) abu draugai — Aldas ir Vaidas, spręsdami kartu.

488. Tėtis nušienauti pievą gali per 8 h, o sūnus — per 12 h. Per kiek laiko tą pievą gali nušienauti tėtis ir sūnus, dirbdami kartu?

489. 8 darbininkai darbą atliko per 18 valandų. Per kiek laiko šį darbą atliktų:
a) 1 darbininkas? b) 2 darbininkai? c) 3 darbininkai? d) 10 darbininkų?

Jei 4 darbininkai darbą atliko per 6 valandas, tai 2 darbininkai šį darbą atliktų per $\frac{4 \cdot 6}{2} = 12$ valandų.

490. Autorius atnešė į leidyklą knygos rankraštį. Rinkėja šį rankraštį kompiuteriu surinktų 5 valandomis greičiau negu pats autorius. Jei šį rankraštį jie rinktų kartu, tai surinktų per 6 h. Per kiek valandų surinktų šį rankraštį rinkėja, rinkdama viena?

Sakykime, kad rinkėja, rinkdama viena, rankraštį surinktų per x valandų. Visą atliktą darbą pažymėkime 1. Patogu sudaryti tokią lentelę:

	Rinkėja	Autorius
Laikas (valandomis), per kurį surinktų visą rankraštį	x	$x + 5$
Rankraščio dalis, kurią surinktų per 1 h	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x+5}$
Rankraščio dalis, kurią surinktų per 6 h	$\frac{6}{x}$	$\frac{6}{x+5}$

491. Dvi kasamosios, dirbdamos kartu, bulvių lauką nukasa per 3 valandas. Per kiek valandų tą lauką nukastų kiekviena kasamoji, dirbdama atskirai, jei pirmajai reikėtų 8 valandomis daugiau negu antrajai?

492. Vienu metu atsukus du čiaupus, baseinas pripildomas vandens per 3 h 45 min. Atsukus tik pirmąjį čiaupą, baseinas pripildomas vandens 4 valandomis greičiau negu atsukus tik antrąjį. Per kiek laiko baseinas pripildomas vandens kiekvienu čiaupu atskirai?

Testas

493. Skaičius $x = 4$ yra sprendinys lygties:

A $x^3 - 4 = 60$ **B** $\sqrt{x} - 4 = -2$ **C** $2^x - 4 = 12$ **D** $\log_2 x - 4 = -2$ **E** Visų šių lygčių

494. Išspręskite lygtį.

a) $2x^3 = -54$; **A** -3 **B** 3 ir -3 **C** 3 **D** -27 **E** Lygtis sprendinių neturi

b) $-2\sqrt{x} = -6$; **A** -9 **B** 9 ir -9 **C** 9 **D** 3 **E** Lygtis sprendinių neturi

c) $3\sqrt{x} = -6$; **A** -4 **B** 4 ir -4 **C** 4 **D** -2 **E** Lygtis sprendinių neturi

d) $2^x = 32$; **A** -5 **B** 5 ir -5 **C** 5 **D** $\frac{1}{5}$ **E** Lygtis sprendinių neturi

e) $3^x = -27$; **A** -3 **B** 3 ir -3 **C** 3 **D** $\frac{1}{3}$ **E** Lygtis sprendinių neturi

f) $12^x = 3$; **A** -4 **B** 4 ir -4 **C** 4 **D** $\log_{12} 3$ **E** Lygtis sprendinių neturi

g) $\log_2 x = 3$; **A** -8 **B** 8 ir -8 **C** 8 **D** 9 **E** Lygtis sprendinių neturi

h) $\log_3 x = -2$; **A** -9 **B** 9 ir -9 **C** 9 **D** $\frac{1}{9}$ **E** Lygtis sprendinių neturi

i) $\lg x = 0$; **A** -1 **B** 1 ir -1 **C** 1 **D** 10 **E** Lygtis sprendinių neturi

j) $3|x| = 15$; **A** -5 **B** 5 ir -5 **C** 5 **D** $\frac{1}{5}$ **E** Lygtis sprendinių neturi

k) $-2|x| = 16$; **A** -8 **B** 8 ir -8 **C** 8 **D** $\frac{1}{8}$ **E** Lygtis sprendinių neturi

495. Kuri lygtis turi sprendinių?

1) $\sqrt{x-3} = -3$; 2) $3^{x-5} = -6$; 3) $\log_3(x+2) = -2$; 4) $|x-5| = -5$.

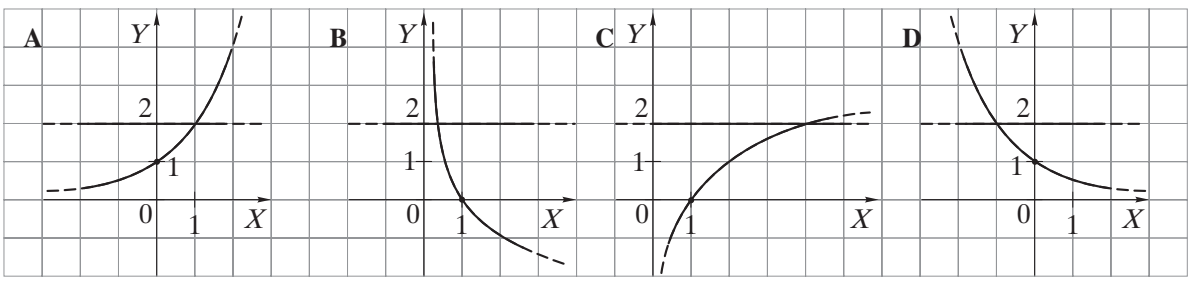
A 1) **B** 2) **C** 3) **D** 4) **E** Nė viena

496. Kuri lygtis *neturi* sprendinių?

1) $\sqrt{x+2} = 0$; 2) $2^{x+3} = 0$; 3) $\log_2(x-5) = 0$; 4) $|x+5| = 0$.

A 1) **B** 2) **C** 3) **D** 4) **E** Visos

497. Kuriame brėžinyje pavaizduotas lygties $\log_{\frac{1}{2}} x = 2$ grafinis sprendimas?



E Nė viename

498. Lygties $\sin x = -\frac{1}{2}$ sprendiniai intervale $[-90°; 90°]$ yra:

A 60° **B** $-60°$ **C** 30° **D** $-30°$ **E** 60° ir $-60°$

499. Lygties $\cos x = \frac{1}{2}$ sprendiniai intervale $[-90°; 90°]$ yra:

A 60° **B** $-60°$ **C** 30° **D** $-30°$ **E** 60° ir $-60°$

500. Lygties $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ sprendiniai intervale $(-90°; 90°)$ yra:

A 60° **B** $-60°$ **C** 30° **D** $-30°$ **E** 60° ir $-60°$

501. Kubo, kurio briaunos ilgis yra 6 cm, viso paviršiaus plotas lygus:

A $36\,\text{cm}^2$ **B** $144\,\text{cm}^2$ **C** $216\,\text{cm}^2$ **D** $216\,\text{cm}^3$ **E** $\sqrt[3]{6}\,\text{cm}^2$

502. Atsukus čiaupą, vonia pripildoma vandens per 6 minutes. Per 2 minutes pripildyta vonios dalis lygi:

A $\frac{1}{6}$ **B** $\frac{1}{5}$ **C** $\frac{1}{4}$ **D** $\frac{1}{3}$ **E** $\frac{1}{2}$

503. Išspręskite kubinę lygtį.

a) $x^3 + 1 = -7$; b) $23 - x^3 = -4$; c) $3 + x^3 = 2$; d) $x^3 + 4 = 7$;

e) $2x^3 - 5 = -3$; f) $5 + 3x^3 = 5$; g) $-2x^3 + 4 = -6$; h) $-x^3 - 7 = 0$;

i) $(x-1)^3 = -8$; j) $(x+3)^3 = 1$; k) $(x-4)^3 = \frac{1}{8}$; l) $(x+5)^3 = 0$.

504. Išspręskite iracionaliąją lygtį.

a) $\sqrt{x} - 2 = 4$; b) $3 - \sqrt{x} = -2$; c) $2 + \sqrt{x} = -4$; d) $\sqrt{x} + 5 = 6$;

e) $3\sqrt{x} + 5 = 5$; f) $-2\sqrt{x} + 3 = -5$; g) $5 - 4\sqrt{x} = 1$; h) $2\sqrt{x} - 6 = -10$;

i) $\sqrt{x+3} = 2$; j) $\sqrt{x-3} = -2$; k) $\sqrt{x-4} = 1$; l) $\sqrt{x+5} = 0$.

505. Išspręskite rodiklinę lygtį.

a) $2^x - 4 = 12$; b) $3^x + 4 = 5$; c) $4^x + 6 = 2$; d) $3 - 2^x = 3$;

e) $2 \cdot 3^x + 1 = 7$; f) $3 \cdot 2^x - 2 = 1$; g) $25 - 2 \cdot 4^x = -7$; h) $5 \cdot 3^x + 4 = 14$;

i) $2^{x-1} = 8$; j) $3^{x+5} = -9$; k) $2^{x-3} = \frac{1}{4}$; l) $3^{x+2} = 0$.

506. Išspręskite logaritminę lygtį.

a) $\log_2 x - 1 = 2$; b) $\log_3 x + 4 = 3$; c) $5 - \log_4 x = 5$; d) $4 + \log_5 x = 5$;

e) $2\log_3 x + 3 = 5$; f) $3\log_2 x - 5 = 4$; g) $3 - 4\log_2 x = -9$; h) $1 + 2\log_5 x = -1$;

i) $\log_2(x+1) = 3$; j) $\log_3(x-5) = 1$; k) $\log_2(x+1) = -1$; l) $\log_5(x-2) = 0$.

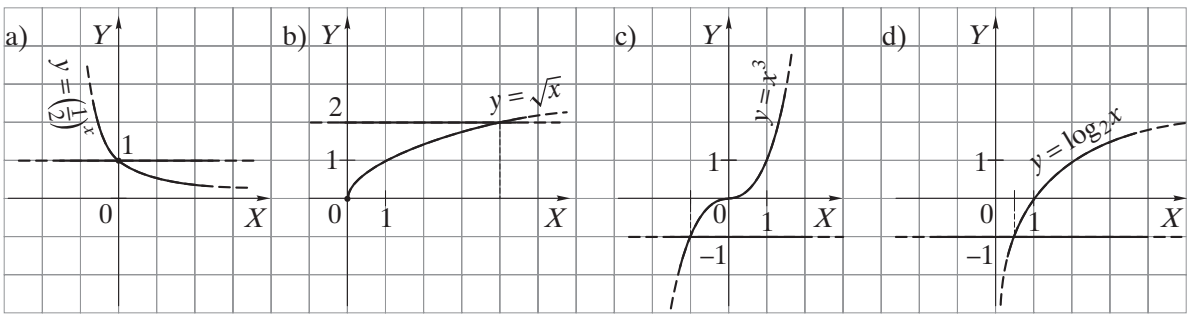
507. Išspręskite lygtį su moduliu.

a) $|x| + 3 = 12$; b) $|x| + 5 = 4$; c) $8 - |x| = 7$; d) $6 - |x| = 6$;

e) $2 \cdot |x| - 5 = 4$; f) $-3 \cdot |x| + 7 = 4$; g) $12 - 3 \cdot |x| = 3$; h) $4 - 2 \cdot |x| = 8$;

i) $|x+3| = 5$; j) $|x-4| = -2$; k) $|x+4| = 0$; l) $|x-2| = \frac{1}{2}$.

508. Mokinys lygtį sprendė grafiškai. Užrašykite tą lygtį ir jos sprendinį.



509. 1) Raskite lygties sprendinį, priklausantį intervalui $[-90°; 90°]$.

a) $\sin x = \frac{1}{2}$; b) $\sin x = -\frac{1}{2}$; c) $\sin x = 1$; d) $\sin x = -1$; e) $\sin x = 0$;

f) $\cos x = \frac{1}{2}$; g) $\cos x = -\frac{1}{2}$; h) $\cos x = 1$; i) $\cos x = -1$; j) $\cos x = 0$.

2) Raskite visus lygties sprendinius.

510. 1) Raskite lygties sprendinį, priklausantį intervalui $(-90°; 90°)$.

a) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; b) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; c) $\operatorname{tg} x = 1$; d) $\operatorname{tg} x = -1$; e) $\operatorname{tg} x = 0$.

2) Raskite visus lygties sprendinius.

511. Išspręskite lygtį, braižydami abiejose lygybės pusėse esančių reiškinių grafikus.

a) $x^3 = -1$; b) $\sqrt{x} = -2$; c) $2^x = 4$; d) $\log_{\frac{1}{2}} x = -2$; e) $|x| = 4$;

f) $\sin x = -2$; g) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, kai $x \in [0°; 180°]$; h) $\operatorname{tg} x = 0$, kai $x \in (90°; 270°)$.

Kartojame tai, ko prireiks 5 skyriuje

512. Duota lygtis su dviem nežinomaisiais x ir y.

a) $x + y = 0$; b) $2x + \frac{18}{y} = 0$; c) $x^2 + 2y = 3$; d) $x^2 + y^2 = 18$;

e) $\sqrt{3x} - y = 3$; f) $2^x = y^2$; g) $\log_3 x - 4 = y$; h) $\log_3 x = y^2$.

Ar skaičių pora $x = 3$ ir $y = -3$ yra lygties sprendinys?

Lygtiẽs su dvíem nežinomaĩsiais x ir y spréndiniu vadinama tokia nežinomųjų reikšmių pora $(x; y)$, su kuria lygtis tampa teisinga skaitine lygybe.

Skaičių pora $x = 4$ ir $y = -2$ yra lygties su dviem nežinomaisiais $y + 3 = \log_4 x$ sprendinys, nes lygybė $-2 + 3 = \log_4 4$ yra teisinga $(1 = 1)$.

513. Duota lygtis su dviem nežinomaisiais x ir y.

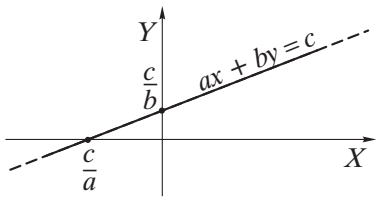
a) $x + y = 5$; b) $x - y = 0$; c) $2y - x = 4$; d) $-x - y = 3$.

1) Užrašykite du šios lygties sprendinius.

2) Tuos sprendinius pavaizduokite stačiakampėje koordinačių plokštumoje OXY taškais $(x; y)$.

3) Nubrėžkite tiesę, kurioje būtų išsidėstę visi tos lygties sprendinius atitinkantys taškai.

Lygties $ax + by = c$ (čia x, y — nežinomieji, a, b, c — skaičiai) sprendinius atitinkantys stačiakampės koordinačių plokštumos taškai yra išsidėstę vienoje tiesėje.



514. Išspręskite lygčių sistemą keitimo būdu; sudėties būdu; grafiniu būdu (braižydami sistemos abiejų lygčių sprendinių grafikus).

a) $\begin{cases} x + y = 4, \\ x - y = -2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - y = 1, \\ x + y = -5; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - y = 0, \\ x - y = -1; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = 3, \\ 2x - 3y = -4. \end{cases}$

Išspręskime lygčių sistemą $\begin{cases} x + y = 1, \\ 2x - y = 5. \end{cases}$

I būdas (keitimo).

$\begin{cases} x + y = 1, \\ 2x - y = 5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - y, \\ 2(1 - y) - y = 5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - y, \\ 2 - 2y - y = 5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - y, \\ -3y = 3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - y, \\ y = -1; \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} x = 1 - (-1), \\ y = -1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = -1. \end{cases}$

II būdas (sudėties).

$+\begin{cases} x + y = 1, \\ 2x - y = 5; \end{cases}$

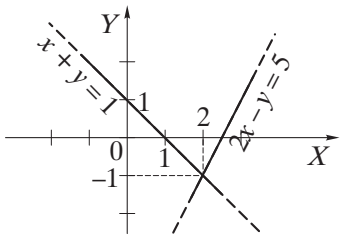
$3x = 6, \Rightarrow x = 2; \quad 2 + y = 1, \Rightarrow y = -1.$

III būdas (grafinis).

Koordinačių plokštumoje OXY braižome abiejų sistemos lygčių sprendinių grafikus, t. y. tieses $x + y = 1$ ir $2x - y = 5$.

Tiesės kertasi taške, kurio koordinatės yra duotosios lygčių sistemos sprendinys.

Atsakymas. $(2; -1)$.



Lygčių sistemos

5 skyrius

5.1. Lygtys su dviem nežinomaisiais 132
5.2. Dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemos 134
5.3. Sprendžiame tekstinius uždavinius 136
5.4. Sprendžiame geometrijos uždavinius 138
Apibendriname 140
Sprendžiame 142
Besidomintiems 144
Kiek sprendinių turi dviejų tiesinių lygčių sistema?
Apskritimo lygtis
Geometrijos uždaviniai. Ritinys ir kūgis 146
Įvairūs uždaviniai. Statistika 147
Testas 148
Pasitikriname 149

Ankstesniame skyriuje sprendėme lygtis su vienu nežinomuoju. Tokias lygtis simboliškai galima užrašyti taip:

$$f(x) = a, \quad f(x) = g(x);$$

čia $f(x)$ ir $g(x)$ — reiškiniai su vienu kintamuoju x, a — skaičius.

Šiame skyriuje spręsime lygtis su dviem nežinomaisiais:

$$f(x; y) = a;$$

čia $f(x; y)$ — reiškinys su dviem kintamaisiais x ir y, a — skaičius.

Lygtis su dviem nežinomaisiais dažniausiai turi be galo daug sprendinių.

Šiame skyriuje daugiausia dėmesio skirsime uždaviniams, kuriuose reikia rasti dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais (x ir y) *bendruosius sprendinius*, t. y. spręsime sistemas:

$$\begin{cases} f(x; y) = a, \\ g(x; y) = b; \end{cases}$$

čia $f(x; y)$, $g(x; y)$ — reiškiniai su dviem kintamaisiais x ir y,
a, b — skaičiai.

Tokias sistemas sprendėme IX ir X klasėse. Šiais metais gilinsime įgūdžius spręsdami sistemas, kurių viena lygtis yra tiesinė (jos sprendinius atitinkantys koordinačių plokštumos OXY taškai išsidėstę vienoje tiesėje), o kita — netiesinė.

5.1. Lygtys su dviem nežinomaisiais

Šiame atverstinyje gilinsime žinias apie lygtis su dviem nežinomaisiais.

1 užduotis. Duota lygtis su dviem nežinomaisiais:

$$3x - y = -6.$$

1) Ar nurodyta skaičių pora $(x; y)$ yra šios lygties sprendinys?
   a) $(2; 0)$; b) $(0; 6)$; c) $(-2; 0)$; d) $(-4; -6)$; e) $(3; -3)$.
2) Nurodykite dar kokią nors šios lygties sprendinių porą.
3) Kiek iš viso sprendinių turi lygtis? Nurodykite *visus* lygties sprendinius.

Lygties $ax + by = c$ $(a \neq 0, b \neq 0)$ visus sprendinius galima nurodyti taip: $\left(x; \frac{c-ax}{b}\right)$, $x \in \boldsymbol{R}$. Iš tikrųjų, pasirinkę kokią nors nežinomojo x reikšmę, ją atitinkančią y reikšmę gauname iš lygties $ax + by = c$ išsireiškę y:

$ax + by = c, \quad | - ax$

$by = c - ax, \quad | : b$

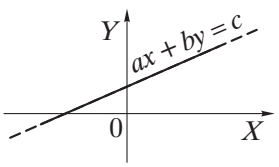
$y = \frac{c - ax}{b}.$

Pavyzdžiui, lygties $2x + 3y = 5$ visi sprendiniai yra $\left(x; \frac{5-2x}{3}\right)$, $x \in \boldsymbol{R}$.

4) Duotosios lygties visus sprendinius pavaizduokite stačiakampėje koordinačių plokštumoje OXY, t. y. nubraižykite lygties sprendinių grafiką.

Lygties $ax + by = c$ sprendinius atitinkantys stačiakampės koordinačių plokštumos OXY taškai yra išsidėstę vienoje tiesėje.

Bet kurią plokštumos OXY tiesę galima užrašyti lygtimi $ax + by = c$.



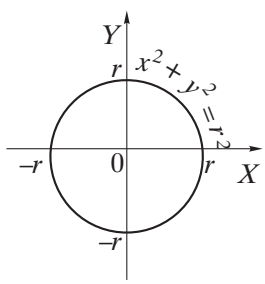
2 užduotis. Duota lygtis su dviem nežinomaisiais:

$$x^2 + y^2 = 9.$$

1) Ar nurodyta skaičių pora $(x; y)$ yra šios lygties sprendinys?
   a) $(0; 3)$; b) $(-3; 0)$; c) $\left(\sqrt{5}; 2\right)$; d) $\left(-2; -\sqrt{6}\right)$; e) $\left(\sqrt{10}; -1\right)$.
2) Nurodykite dar keletą šios lygties sprendinių.
3) Surastus lygties sprendinius pažymėkite koordinačių plokštumoje OXY.

Lygties $x^2 + y^2 = r^2$ $(r > 0)$ sprendinius atitinkantys stačiakampės koordinačių plokštumos OXY taškai išsidėstę apskritime, kurio centras yra koordinačių pradžios taškas, o spindulys lygus r.

Bet kurį plokštumos OXY apskritimą, kurio centras yra taške $(0; 0)$, o spindulys lygus r, galima užrašyti lygtimi $x^2 + y^2 = r^2$.
Apie tai rašoma atverstinyje „Besidomintiems“, p. 145.



5.1. Uždaviniai

515. Patikrinkite, kurios skaičių porų $(0; 3)$, $(-2; 1)$, $(2; 4)$, $(-3; -4)$ yra nurodytos lygties sprendiniai.
a) $x + 2y = 10$; b) $4x + 5y = -3$; c) $5x^2 + 4y = 12$; d) $x^2 + y^2 = 25$.

516. Raskite visas lygties natūraliųjų skaičių sprendinių poras.
a) $x + 3y = 16$; b) $-2x - y = -10$; c) $2x^2 + y = 9$; d) $x^2 + y^2 = 13$.

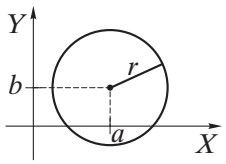
517. Iš lygties išreiškę nežinomąjį y nežinomuoju x, raskite tris jos sprendinius. Užrašykite visus lygties sprendinius.
a) $7x + y = 10$; b) $3x - y = -5$; c) $x^2 + y = 5$; d) $3x^2 + 2y = 6$; e) $\frac{x^2}{4} - 3y = 3$.

518. Jonas išsprendė x uždavinių, vertinamų 4 taškais, ir y uždavinių, vertinamų 5 taškais. Iš viso jis surinko 50 taškų.
1) Sudarykite lygtį su dviem nežinomaisiais šiam uždaviniui išspręsti.
2) Parašykite bet kurį sudarytosios lygties sprendinį.
3) Nurodykite visus sudarytosios lygties sprendinius.
4) Kiek uždavinių, vertinamų 4 taškais, galėjo išspręsti Jonas?

519. Skaičių pora $(1; -2)$ yra lygties $ax - y = 4$ sprendinys.
1) Apskaičiuokite a reikšmę.
2) Nubrėžkite lygties sprendinių grafiką.
3) Raskite koordinates taškų, kuriuose grafikas kerta abscisių ir ordinačių ašis.

520. Nubrėžkite lygties sprendinių grafiką.
a) $x + y = -2$; b) $2x + y = 4$; c) $3x - 2y = 0$; d) $3x + 2y = 12$; e) $x^2 + y^2 = 4$;
f) $x^2 + y^2 = 1$; g) $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$; h) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$.

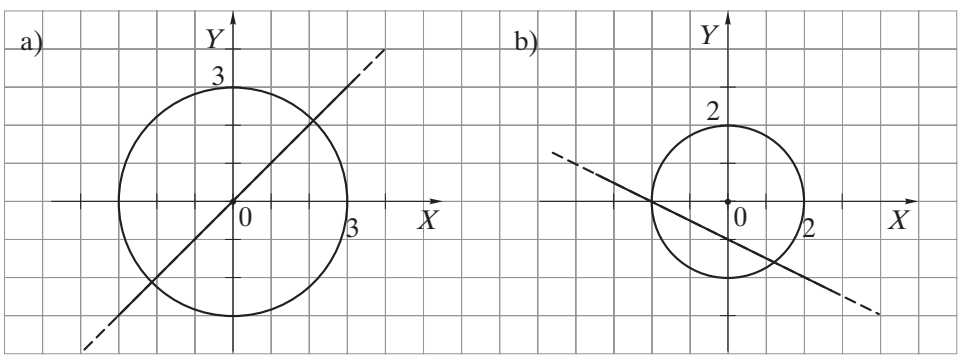
Lygties $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ $(r > 0)$ sprendinių grafikas yra apskritimas, kurio centras yra taške $(a; b)$, o spindulys lygus r.



521. Nebraižydami lygties sprendinių grafiko, pasakykite, ar jis eina per tašką $(-2; 5)$.
a) $4x + 3y = 7$; b) $3x^2 - 4y = 8$; c) $y - \frac{8}{x} = 0$; d) $x^2 + y^2 = 1$; e) $(x - 3)^2 + y^2 = 50$.

Lygties $x^2 + y^2 = 13$ grafikas:
- eina per tašką $(3; -2)$, nes $3^2 + (-2)^2 = 9 + 4 = 13$;
- neina per tašką $(-3; 3)$, nes $(-3)^2 + 3^2 = 9 + 9 = 18 \neq 13$.

522. Vienoje koordinačių plokštumoje nubrėžta tiesė $ax + by = c$ ir apskritimas $x^2 + y^2 = r^2$. Remdamiesi jais, nustatykite apytiksles koordinates taškų, kuriuose tiesė kerta apskritimą.



523. Vienoje koordinačių plokštumoje nubrėžkite abiejų lygčių sprendinių grafikus ir nustatykite jų bendrų taškų koordinates.
a) $x + y = 3$ ir $2x - y = -3$; b) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 36$ ir $3x + 4y = 7$.

5.2. Dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemos

Šiame atverstinyje gilinsime žinias apie dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemas.

Užduotis. Duota dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistema: $\begin{cases} x - y = 0, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$

1) Ar nurodyta skaičių pora $(x; y)$ yra šios sistemos sprendinys?
   a) $(2; 2)$; b) $(0; 0)$; c) $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$; d) $(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$.

Dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais x ir y sistemos sprendiniu vadinama tokia nežinomųjų reikšmių pora $(x; y)$, su kuria abi sistemos lygtys tampa teisingomis skaitinėmis lygybėmis.

Skaičių pora $(4; 2)$ yra lygčių sistemos $\begin{cases} x + y = 6, \\ x - y = 2 \end{cases}$ sprendinys, nes abi lygybės $4 + 2 = 6$ ir $4 - 2 = 2$ yra teisingos.

2) Vienoje koordinačių plokštumoje OXY nubraižykite abiejų sistemos lygčių sprendinių grafikus: tiesę $x - y = 0$ ir apskritimą $x^2 + y^2 = 4$.
3) Raskite tiesės ir apskritimo bendrų taškų apytiksles koordinates.
4) Išspręskite lygčių sistemą keitimo būdu.

Išspręskime lygčių sistemą $\begin{cases} 3x - y = 0, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$

Lygčių sistemą, kurios viena lygtis yra tiesinė, o kita — nėra tiesinė, dažnai patogu spręsti *keitimo būdu*.

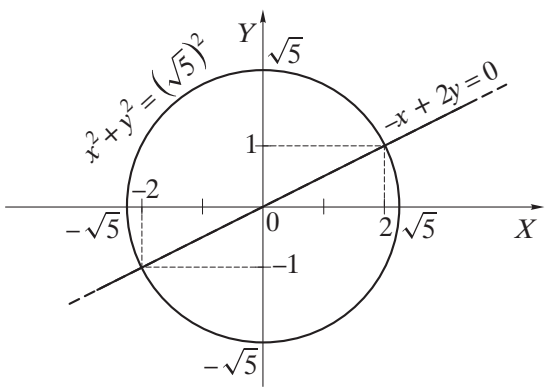
1) Iš tiesinės lygties $3x - y = 0$ išreikškime y: $y = 3x$.
2) Šią išraišką įrašykime į lygtį $x^2 + y^2 = 10$ ir išspręskime gautąją lygtį su vienu nežinomuoju:
   $x^2 + (3x)^2 = 10, \Rightarrow x^2 + 9x^2 = 10, \Rightarrow 10x^2 = 10, \Rightarrow x^2 = 1, \Rightarrow x = -1, x = 1.$
3) Apskaičiuokime atitinkamas y reikšmes:
   kai $x = -1$, tai $y = 3x = 3 \cdot (-1) = -3$;
   kai $x = 1$, tai $y = 3x = 3 \cdot 1 = 3$.
4) *Atsakymas*. $(-1; -3)$, $(1; 3)$.

$\begin{cases} -x + 2y = 0, \\ x^2 + y^2 = 5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y, \\ (2y)^2 + y^2 = 5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y, \\ 5y^2 = 5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y, \\ y^2 = 1. \end{cases}$

$y^2 = 1, \Rightarrow y = -1, y = 1.$

Kai $y = 1$, tai $x = 2$; kai $y = -1$, tai $x = -2$.

Atsakymas. $(2; 1)$, $(-2; -1)$.

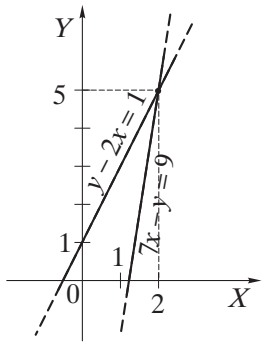


524. Ar nurodyta skaičių pora yra lygčių sistemos $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x+y=-5 \end{cases}$ sprendinys?

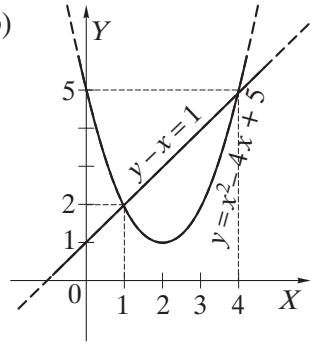
a) $(-5;\,0)$; b) $(3;\,-4)$; c) $(-4;\,-1)$; d) $(0;\,-5)$; e) $(-3;\,-2)$.

525. 1) Parašykite lygčių sistemą, kuri atitiktų brėžinį.

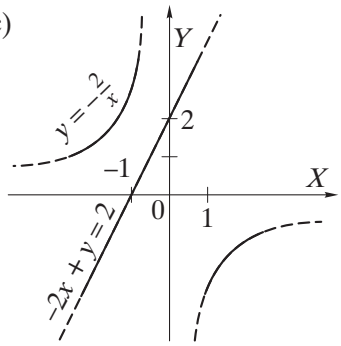
a)



b)



c)



2) Užrašykite a) ir b) lygčių sistemų sprendinius.
3) Ar turi sprendinių lygčių sistema c)?

526. Grafiškai išspręskite lygčių sistemą.

a) $\begin{cases} x+y=-3, \\ 2x-y=-3; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y=-5, \\ 2x-y=5; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ y=2x-2; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ y=2; \end{cases}$

e) $\begin{cases} y=\frac{6}{x}, \\ y-x=1; \end{cases}$ f) $\begin{cases} y=-\frac{3}{x}, \\ y=x; \end{cases}$ g) $\begin{cases} y=x^2+1, \\ y-x=1; \end{cases}$ h) $\begin{cases} y=-x^2+4x-4, \\ y-x=-4. \end{cases}$

527. Keitimo būdu išspręskite lygčių sistemą.

a) $\begin{cases} 2x-3y=-9, \\ 3x-y=4; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+7y=10, \\ 3x-4y=5; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x=2y, \\ x^2+2y^2=96; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-y=2, \\ x^2-y^2=8; \end{cases}$

e) $\begin{cases} x-y=3, \\ xy=18; \end{cases}$ f) $\begin{cases} x-3y=5, \\ xy+x=24; \end{cases}$ g) $\begin{cases} 2x-y=0, \\ \frac{12}{y}-\frac{3}{x}=1; \end{cases}$ h) $\begin{cases} x-y=5, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}. \end{cases}$

Išspręskime lygčių sistemą $\begin{cases} x^2+xy-y^2=11, & (1) \\ x-2y=1. & (2) \end{cases}$

Iš sistemos (2) lygties išreikškime x: $x=1+2y$.
Šią išraišką įrašykime į (1) lygtį ir išspręskime gautąją lygtį su vienu nežinomuoju:
$(1+2y)^2+(1+2y)\cdot y-y^2=11$,
$1+4y+4y^2+y+2y^2-y^2=11$,
$5y^2+5y-10=0$,
$y^2+y-2=0$,
$y_1=-2$, $y_2=1$.
Apskaičiuokime atitinkamas x reikšmes:
kai $y_1=-2$, tai $x_1=1+2y_1=1+2\cdot(-2)=-3$, t. y. $(-3;\,-2)$ — sprendinys;
kai $y_2=1$, tai $x_2=1+2y_2=1+2\cdot 1=3$, t. y. $(3;\,1)$ — sprendinys.
Atsakymas. $(-3;\,-2)$, $(3;\,1)$.

528. Nebraižydami grafikų, nustatykite, kuriuose taškuose susikerta:

a) tiesės $x-2y=3$ ir $2x-3y=8$;
b) parabolė $y=x^2-8x+16$ ir tiesė $2x-3y=0$;
c) tiesė $x+y-4=0$ ir hiperbolė $y=\frac{3}{x}$;
d) apskritimas $x^2+y^2=64$ ir tiesė $x-y=2$.

5.3. Sprendžiame tekstinius uždavinius

Tekstinius uždavinius, kuriuose yra du nežinomi dydžiai, dažnai patogu būna spręsti sudarant dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemas.
Šiame atverstinyje ir spręsime tokius tekstinius uždavinius.



Užduotis. Raskite du skaičius, kurių suma lygi 12, o jiems atvirkštinių skaičių suma lygi $\frac{3}{8}$.

1) Vieną skaičių pažymėkite x, o kitą — y.
2) Užrašykite lygtimi, kam lygi tų skaičių suma.
3) Užrašykite skaičius, atvirkštinius skaičiams x ir y.

Skaičiai a ir $\frac{1}{a}$ yra vienas kitam atvirkštiniai.

4) Užrašykite lygtimi, kam lygi tų atvirkštinių skaičių suma.
5) Sudarykite ir išspręskite dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą.
6) Parašykite atsakymą.

Raskime du skaičius, kurių suma lygi 20, o sandauga yra 96.

1) Vieną skaičių pažymėkime x, o kitą — y. Pagal sąlygą sudarykime sistemą:
$$\begin{cases} x + y = 20, \\ x \cdot y = 96. \end{cases}$$
2) Iš lygties $x + y = 20$ išreikškime y: $y = 20 - x$.
3) Šią išraišką įrašykime į lygtį $x \cdot y = 96$ ir išspręskime gautąją lygtį:
$$x \cdot (20 - x) = 96,$$
$$20x - x^2 - 96 = 0,$$
$$x^2 - 20x + 96 = 0,$$
$$x_1 = 8,\ x_2 = 12.$$
4) Apskaičiuokime atitinkamas y reikšmes:
$$y_1 = 20 - x_1 = 20 - 8 = 12;$$
$$y_2 = 20 - x_2 = 20 - 12 = 8.$$
5) Gavome, kad lygčių sistemos
$$\begin{cases} x + y = 20, \\ x \cdot y = 96 \end{cases}$$
sprendiniai yra (8; 12) ir (12; 8). Tačiau atsakyme reikia nurodyti ne šios sistemos sprendinius, bet du skaičius, kurių suma lygi 20, o sandauga yra 96. Akivaizdu, kad tie skaičiai yra 8 ir 12:
$$8 + 12 = 20, \quad 8 \cdot 12 = 96.$$

Atsakymas. 8 ir 12.

Raskime skaičius x ir y, kurių dviguba suma lygi -4, o jų kvadratų suma yra 34.

$$\begin{cases} 2(x + y) = -4, \\ x^2 + y^2 = 34; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = -2, \\ x^2 + y^2 = 34; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 - y, \\ (-2 - y)^2 + y^2 = 34; \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2 - y, \\ y^2 + 2y - 15 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 - y, \\ y_1 = -5;\ y_2 = 3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3; & x_2 = -5, \\ y_1 = -5; & y_2 = 3. \end{cases}$$

Vadinasi, ieškomi skaičiai yra -5 ir 3.

5.3. Uždaviniai

529. Išspręskite uždavinį, sudarydami lygčių sistemą.
a) Dviejų skaičių suma lygi 24, o tų skaičių skirtumas yra 8. Kokie tie skaičiai?
b) Raskite du skaičius, kurių skirtumas yra 4, o sandauga lygi 5.
c) Kokių dviejų skaičių suma yra 15, o jų kvadratų suma lygi 425?
d) Dviejų skaičių suma yra 15, o jiems atvirkštinių skaičių suma lygi $\frac{5}{18}$. Raskite tuos skaičius.

530. Petras metė į taupyklę tik 50 ct ir 20 ct vertės monetas ir per mėnesį surinko 26 eurus. Kiek kokios vertės monetų yra taupyklėje, jei iš viso joje yra 100 monetų?

531. Ąžuolas vyresnis už Eglę. Jų amžių skirtumas yra 12 metų, o suma — 50 metų. Kiek metų yra Ąžuolui ir kiek — Eglei?

532. Prieš 4 metus tėvas buvo vyresnis už sūnų 6 kartus. Po 16 metų tėvas bus 2 kartus vyresnis už sūnų. Kiek dabar yra metų tėvui ir kiek — sūnui?

533. Mama pirko 2 rūšių saldainių. Vienos rūšies saldainių kilogramas kainuoja 12 eurų, o kitos — 10 eurų. Saldainiai kainavo 8 eurus. Kiek gramų kiekvienos rūšies saldainių pirko mama, jei jie svėrė 700 gramų?

534. Plaukdamas pasroviui, kateris per 4 valandas nuplaukia 84 km, o plaukdamas prieš srovę per 3 valandas nuplaukia 48 km. Koks yra katerio greitis stovinčiame vandenyje (savasis katerio greitis) ir koks upės tėkmės greitis?

Kelio formulė: $s = v \cdot t$, čia s — kelias, v — greitis, t — laikas.
Greitis pasroviui: $v_{\text{pa}} = v_{\text{savasis}} + v_{\text{upės}}$; greitis prieš srovę: $v_{\text{pr}} = v_{\text{savasis}} - v_{\text{upės}}$.

535. Sportinis lėktuvas pavėjui skrido 180 km/h greičiu, o prieš vėją — 150 km/h greičiu. Apskaičiuokite vėjo greitį ir lėktuvo savąjį greitį.

536. Iš dviejų miestelių, tarp kurių yra 38 km, vienu metu dviračiais išvažiavo Agnė ir Karolis. Jie susitiko po 4 h. Agnė iki susitikimo nuvažiavo 2 km daugiau negu Karolis. Kokiu greičiu važiavo Agnė ir kokiu — Karolis?

537. Vakarė ir Aušrinė, dirbdamos kartu, visą darbą atlieka per 2 h. Vakarė, dirbdama atskirai, šį darbą atlieka 3 valandomis greičiau negu Aušrinė. Per kiek valandų šį darbą atliktų Vakarė ir per kiek — Aušrinė, dirbdamos atskirai?

538. Du autokrautuvai, dirbdami kartu, visą darbą atlieka per 20 h. Per kiek valandų atliktų šį darbą kiekvienas autokrautuvas, dirbdamas atskirai, jei antrasis jį atlieka 9 valandomis greičiau negu pirmasis?

539. Sumaišius tam tikrus kiekius 60 % ir 15 % koncentracijos tos pačios rūgšties tirpalų, gauta 450 gramų 25 % koncentracijos tirpalo. Kiek gramų kiekvienos koncentracijos tirpalo sumaišyta?

540. Du broliai padėjo savo indėlius į skirtingus bankus, kurie atitinkamai moka 16 % ir 20 % metinių palūkanų. Po metų jie abu iš viso gavo 3520 Eur palūkanų. Jeigu bankų palūkanos būtų buvę atitinkamai 14 % ir 18 %, tai broliai iš viso būtų gavę 400 Eur palūkanų mažiau. Po kiek eurų kiekvienas brolis buvo padėjęs į banką?

541. Dviženklio skaičiaus skaitmenų suma lygi 15. Jei jo skaitmenis sukeistume vietomis, tai gautasis skaičius būtų 9 vienetais mažesnis už pradinį. Raskite pradinį skaičių.

Dviženklį skaičių $\overline{xy}$ galima užrašyti taip: $\overline{xy} = 10x + y$. Pavyzdžiui, $37 = 10 \cdot 3 + 7$.

542. Teigiamas dviženklis skaičius yra 4 kartus didesnis už jo skaitmenų sumą ir 2 kartus didesnis už skaitmenų sandaugą. Koks tai skaičius?

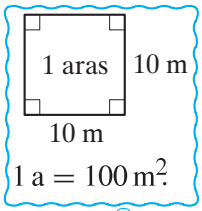
5.4. Sprendžiame geometrijos uždavinius

Yra daug geometrinių uždavinių, kuriuos patogu būna spręsti sudarant dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemas.
Šiame atverstinyje ir mokysimės spręsti tokius uždavinius.

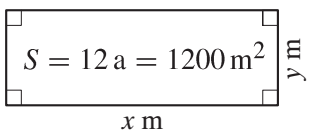
Užduotis. Stačiakampė čiuožykla aptverta 100 m ilgio tvora. Čiuožyklos plotas lygus 600 m^2. Koks yra čiuožyklos ilgis ir koks plotis?

Stačiakampio sklypo plotas lygus 12 arų. Ūkininkas šį sklypą aptvėrė 140 metrų ilgio tvora. Raskime sklypo matmenis.

1) Išreikškime sklypo plotą kvadratiniais metrais (nes perimetras duotas metrais).
Kadangi 1 a = 100 m^2, tai 12 a = $(12 \cdot 100)\ m^2 = 1200\ m^2$.



2) Pažymėkime sklypo matmenis: ilgį — x m, plotį — y m.



3) Užrašykime lygtimis su dviem nežinomaisiais x ir y stačiakampio:
- perimetrą — $(x + y) \cdot 2 = 140$;
- plotą — $x \cdot y = 1200$.

Perimetras lygus tvoros ilgiui.

4) Užrašykime šių dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą:

$$\begin{cases} (x + y) \cdot 2 = 140, & (1) \\ x \cdot y = 1200. & (2) \end{cases}$$

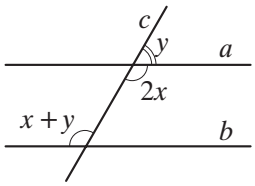
5) Išspręskime ją.
- Iš tiesinės (1) lygties vieną nežinomąjį išreikškime kitu:
  $(x + y) \cdot 2 = 140$,
  $x + y = 70$,
  $y = 70 - x$.
- Gautą y išraišką įrašykime į sistemos (2) lygtį:
  $x \cdot (70 - x) = 1200$.
- Išspręskime gautąją lygtį su vienu nežinomuoju:
  $70x - x^2 = 1200$,
  $x^2 - 70x + 1200 = 0$,
  $x_1 = 30,\ x_2 = 40$.
- Šioms nežinomojo x reikšmėms $x_1 = 30$ ir $x_2 = 40$ raskime atitinkamas nežinomojo y reikšmes:
  $y_1 = 70 - x_1 = 70 - 30 = 40$,
  $y_2 = 70 - x_2 = 70 - 40 = 30$.

6) Gavome, kad sistema turi du sprendinius (30; 40) ir (40; 30). Tačiau uždavinio sąlygoje prašoma rasti ne tos sistemos sprendinius, bet sklypo matmenis. Sistemos abi sprendinių poros reiškia tų pačių matmenų sklypą.

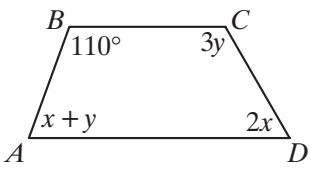
Atsakymas. Sklypo matmenys yra 40 metrų ir 30 metrų.

543. Remdamiesi brėžinio duomenimis, sudarykite lygčių sistemą ir apskaičiuokite nežinomųjų x ir y reikšmes laipsniais.

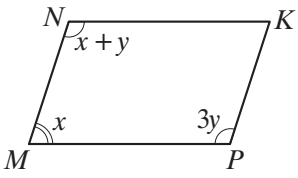
a) $a \parallel b$;



b) $ABCD$ – trapecija;

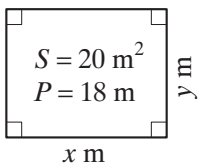


c) $MNKP$ – lygiagretainis.

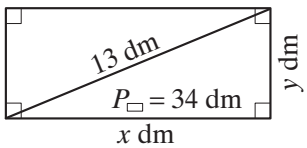


544. Remdamiesi brėžinio duomenimis (P — perimetras, S — plotas), apskaičiuokite kraštinių ilgius x ir y.

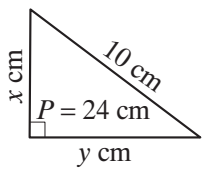
a)



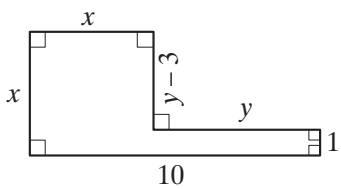
b)



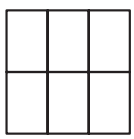
c)



545. Apskaičiuokite pavaizduotos figūros perimetrą.



546. Kvadratinis laukas padalytas į šešis lygius stačiakampius sklypelius. Kiekvienas sklypelis aptvertas 20 m ilgio tvorele. Kokio ilgio tvora juosia visą lauką?



547. Stačiakampės aikštelės įstrižainės ilgis yra 10 m, o aikštelę juosiančios tvoros ilgis yra 28 m. Apskaičiuokite aikštelės matmenis.

548. Stačiakampio ilgis 20 cm didesnis už plotį. Jei jo ilgį sumažintume 10 cm, o plotį padidintume 6 cm, tai stačiakampio plotas padidėtų 12 cm^2. Apskaičiuokite stačiakampio ilgį ir plotį.

549. Stačiakampę aikštelę juosiančios tvoros ilgis yra 240 m. Jei aikštelės ilgį sumažintume 14 m, o plotį padidintume 10 m, tai jos plotas padidėtų 4 m^2. Apskaičiuokite aikštelės matmenis.

550. Stačiakampio perimetras lygus 48 cm. Jei jo ilgį sumažintume 25 %, o plotį padidintume 25 %, tai stačiakampio perimetras nepasikeistų. Apskaičiuokite stačiakampio plotą.

551. Stačiojo trikampio įžambinės ilgis yra 25 cm, o perimetras lygus 60 cm. Apskaičiuokite trikampio statinių ilgius ir plotą.

552. Stačiojo trikampio vienas statinis yra 7 cm trumpesnis už kitą, o įžambinės ilgis lygus 13 cm. Apskaičiuokite trikampio plotą.

553. Stačiakampio įstrižainės ilgis lygus 15 cm. Jeigu vieną jo kraštinę sumažintume 6 cm, o kitą — 8 cm, tai stačiakampio perimetras sumažėtų trigubai. Apskaičiuokite stačiakampio plotą.

554. Ant stačiakampio kiekvienos kraštinės nubraižytas kvadratas. Kvadratų plotų suma lygi 104 cm^2, o stačiakampio perimetras lygus 20 cm. Apskaičiuokite stačiakampio plotą.

555. Naglis nuo kvadratinio popieriaus lapo atkirpo 3 cm pločio juostelę. Likusios stačiakampės lapo dalies plotas lygus 70 cm^2. Kokie buvo pradinio lapo matmenys?

Lygtis su dviem nežinomaisiais

Lygtis, kurioje yra du nežinomieji, vadinama *lygtimì su dvíem nežinomaĩsiais*.

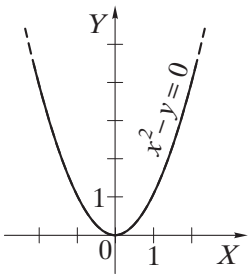
Lygtiẽs su dvíem nežinomaĩsiais x ir y spréndiniu vadinama nežinomųjų reikšmių pora $(x; y)$, su kuria lygtis tampa teisinga skaitine lygybe.

Lygties su dviem nežinomaisiais x ir y sprendinius pavaizdavę stačiakampėje koordinačių plokštumoje OXY taškais $(x; y)$, gauname lygties sprendinių grafiką.

$x^2 - y = 0$ — lygtis su dviem nežinomaisiais x ir y.

Skaičių pora $(-2; 4)$ yra lygties $x^2 - y = 0$ sprendinys, nes lygybė $(-2)^2 - 4 = 0$ yra teisinga.

Lygties $x^2 - y = 0$ visus sprendinius galima užrašyti taip: $(x; x^2)$, $x \in \boldsymbol{R}$.



Tiesinė lygtis

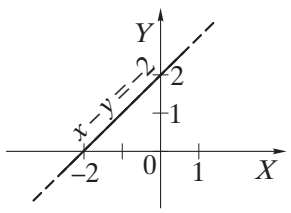
Lygtis, kurią galima užrašyti

$ax + by = c$, čia a, b, c — skaičiai ($a \neq 0$, $b \neq 0$),

vadinama *tiesinė lygtimì su dvíem nežinomaĩsiais*.

Tiesinės lygties sprendinius vaizduojantys stačiakampės koordinačių plokštumos OXY taškai $(x; y)$ sudaro tiesę. Bet kurią plokštumos tiesę galima užrašyti lygtimi $ax + by = c$.

$x - y = -2$ — tiesinė lygtis, $a = 1$, $b = -1$, $c = -2$.



Apskritimo lygtis

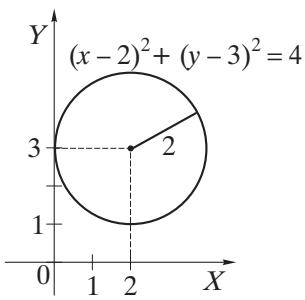
Lygtis, kurią galima užrašyti

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, čia a, b, r — skaičiai ($r > 0$),

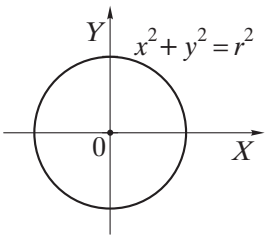
vadinama *apskritìmo lygtimì*.

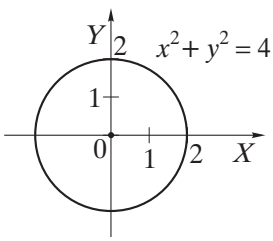
Apskritimo lygties sprendinius vaizduojantys stačiakampės koordinačių plokštumos OXY taškai $(x; y)$ sudaro apskritimą, kurio centras yra $(a; b)$, o spindulys lygus r.

$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$ — apskritimo lygtis, $a = 2$, $b = 3$, $r = 2$.



Bet kurį plokštumos OXY apskritimą, kurio centras yra taške $(0; 0)$, o spindulys lygus r, galima užrašyti lygtimi $x^2 + y^2 = r^2$.





Apibendriname

Lygčių sistemos

Kai ieškome dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais bendrųjų sprendinių, tai sprendžiame tų lygčių sistemą.

$\begin{cases} f(x;\,y)=a, \\ g(x;\,y)=b \end{cases}$ — dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais x ir y sistema;

$f(x;\,y)$ ir $g(x;\,y)$ — reiškiniai su dviem kintamaisiais x ir y; a, b — skaičiai.

Dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais x ir y sistemos sprendiniu vadinama nežinomųjų reikšmių pora $(x;\,y)$, su kuria sistemos abi lygtys tampa teisingomis skaitinėmis lygybėmis.

Dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemos sprendinius galima rasti sprendžiant sistemą algebriškai (keitimo ar / ir sudėties būdu) bei grafiškai (braižant sistemos lygčių sprendinių grafikus).

Spręsdami *keitimo* būdu:
1) iš sistemos kurios nors lygties vieną nežinomąjį išreiškiame kitu;
2) gautąją išraišką įstatome į kitą sistemos lygtį;
3) išsprendžiame gautąją lygtį su vienu nežinomuoju;
4) apskaičiuojame kito nežinomojo reikšmes.

Spręsdami *sudėties* būdu:
1) pertvarkome (jei reikia) lygtis taip, kad prie vieno iš nežinomųjų būtų vienas kitam priešingi skaičiai;
2) panariui sudedame lygtis;
3) išsprendžiame gautąją lygtį su vienu nežinomuoju;
4) apskaičiuojame kito nežinomojo reikšmes.

Spręsdami *grafiniu* būdu:
1) braižome abiejų lygčių sprendinių grafikus;
2) randame tų grafikų bendrų taškų koordinates.

Sprendžiant sistemą grafiškai, dažniausiai nepavyksta nustatyti tikslių sistemos sprendinių (galima gauti tik apytiksles sprendinių reikšmes).
Sprendžiant sistemą algebriškai, visada gaunami tikslūs sprendiniai (jei jie egzistuoja).

Tekstinius uždavinius, kuriuose yra du nežinomi dydžiai, dažnai patogu būna spręsti sudarant dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą.
1) Nežinomus dydžius pasižymime raidėmis.
2) Pagal sąlygą sudarome lygčių sistemą.
3) Išsprendžiame sudarytąją sistemą.
4) Pasitikriname, ar gautieji sprendiniai tenkina uždavinio sąlygą.
5) Parašome atsakymą.

$\begin{cases} x-y=-2, \\ x^2-y=0 \end{cases}$ — dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistema.

Skaičių pora $(2;\,4)$ yra lygčių sistemos $\begin{cases} x-y=-2, \\ x^2-y=0 \end{cases}$ sprendinys, nes lygybės $2-4=-2$ ir $2^2-4=0$ yra teisingos.

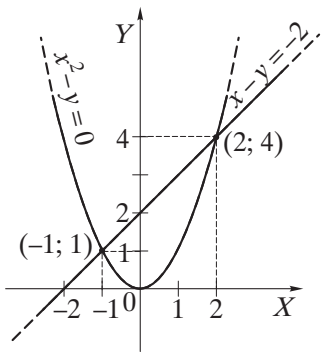
$\begin{cases} x-y=-2, \\ x^2-y=0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x+2, \\ x^2-(x+2)=0; \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} y=x+2, \\ x^2-x-2=0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x+2, \\ x_1=-1,\ x_2=2; \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} y_1=1,\ y_2=4, \\ x_1=-1,\ x_2=2. \end{cases}$

$\begin{cases} x-y=-2, \\ x^2-y=0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+y=2, \\ x^2-y=0; \end{cases} \Rightarrow$

$x^2-x-2=0, \Rightarrow x_1=-1,\ x_2=2;$
$y_1=1,\ y_2=4.$



Raskime du skaičius, kurių suma lygi 7, o sandauga lygi 10.
Sakykime, kad vienas skaičius yra x, o kitas — y. Tada:

$\begin{cases} x+y=7, \\ xy=10; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=7-x, \\ x(7-x)=10; \end{cases} \Rightarrow$

$x^2-7x+10=0, \Rightarrow x_1=2,\ x_2=5;$
$y_1=5,\ y_2=2.$
Atsakymas. 2 ir 5.

556. Kuri skaičių pora — $(2; 3)$ ar $(-1; 3)$ — yra lygties $x^2 - y + 2 = 0$ sprendinys? Nurodykite dar dvi šios lygties sprendinių poras.

557. 1) Nurodykite kokias nors dvi lygties sprendinių poras.

a) $y - x^2 = -2$; b) $xy = -4$; c) $x^2 + y^2 = 49$.

2) Pavaizduokite visus lygties sprendinius koordinačių plokštumoje OXY.

3) Remdamiesi grafiku, nustatykite, ar skaičių pora $(4; -1)$ yra lygties sprendinys.

558. Per krepšinio rungtynes Arvydas dvitaškiais ir tritaškiais metimais iš viso surinko 28 taškus.

1) Užrašykite šią situaciją lygtimi su dviem nežinomaisiais.

2) Nurodykite vieną šios lygties sprendinį, kuris *netenkina* uždavinio sąlygos.

3) Kiek daugiausia tritaškių galėjo įmesti Arvydas?

4) Nurodykite visas galimas Arvydo taiklių dvitaškių ir tritaškių metimų skaičių poras.

559. Nubrėžkite lygties su dviem nežinomaisiais sprendinių grafiką.

a) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$; b) $y - 0{,}5x^2 + 2 = 0$; c) $xy = -4$; d) $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$.

560. Ar nurodyta skaičių pora yra lygčių sistemos $\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 5, \\ y - 2x = 1 \end{cases}$ sprendinys?

a) $(1; 1)$; b) $(-1; -1)$; c) $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$; d) $\left(-\frac{1}{2}; -2\right)$; e) $\left(2; \frac{1}{2}\right)$; f) $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$.

561. Išspręskite lygčių sistemą grafiškai.

a) $\begin{cases} x - 3y = 3, \\ 2x + 9y = 11; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y = -1, \\ -x + \frac{y}{4} = -3; \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = x^2 + 1, \\ x + 2y = 5; \end{cases}$ d) $\begin{cases} y + 2x = 5, \\ y = x^2 - 6x + 8; \end{cases}$

e) $\begin{cases} xy = 4, \\ y - x = 1; \end{cases}$ f) $\begin{cases} xy = -2, \\ \frac{y}{2} + x = 3; \end{cases}$ g) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ x - y = 4; \end{cases}$ h) $\begin{cases} x^2 + (y - 1)^2 = 4, \\ y = -\frac{x}{3}. \end{cases}$

562. Išspręskite lygčių sistemą keitimo būdu.

a) $\begin{cases} x + y = 4, \\ xy + 7 = 2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8, \\ x - y = 4; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 37, \\ x - y = -3; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 - xy - y^2 = 11, \\ x - 2y = 1; \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x - y = 0, \\ \frac{2}{y} - \frac{3}{x} = 1; \end{cases}$ f) $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}, \\ y - x = 1; \end{cases}$ g) $\begin{cases} 3x + y = 1, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -2{,}5; \end{cases}$ h) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 1\frac{1}{3}, \\ x + y = 5. \end{cases}$

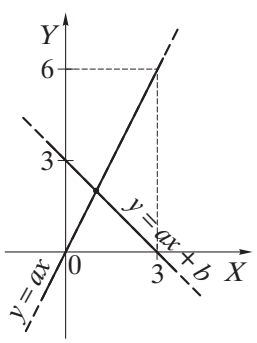
563. Išspręskite lygčių sistemą sudėties būdu.

a) $\begin{cases} 8x - 17y = 4, \\ -8x + 15y = 4; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - 2y = 1, \\ 15x - 3y = -3; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 4y = 0, \\ 2x + 3y = 1; \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = 14, \\ \frac{5}{6}x - \frac{1}{2}y = 18; \end{cases}$

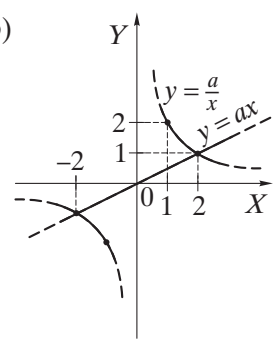
e) $\begin{cases} x^2 + y = 14, \\ y - x = 8; \end{cases}$ f) $\begin{cases} y + x = 3, \\ x^2 - y = 39; \end{cases}$ g) $\begin{cases} y = x^2, \\ 2x - y = -3; \end{cases}$ h) $\begin{cases} x + y = 9, \\ y^2 + x = 29. \end{cases}$

564. Dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais x ir y sistema buvo sprendžiama grafiškai. Remdamiesi brėžiniu, sudarykite ir algebriškai išspręskite lygčių sistemą.

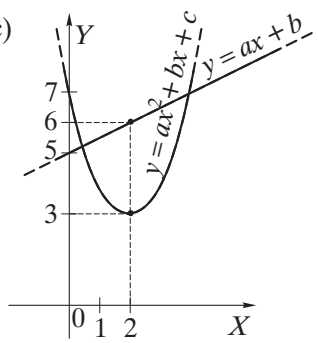
a)



b)



c)



565. Nebraižydami grafikų, užrašykite koordinates taškų, kuriuose susikerta:

a) parabolė $y = 14 - x^2$ ir tiesė $y - x = 8$; b) tiesė $y - 3x = 0$ ir hiperbolė $y = -\frac{3}{x}$;

c) tiesė $x - y = 4$ ir apskritimas $x^2 + y^2 = 16$; d) tiesė $y = 0$ ir apskritimas $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$.

566. Su kuria b reikšme tiesė $y = 3x + b$ eina per tiesės $2x - y - 5 = 0$ ir parabolės $y - x^2 = -4$ susikirtimo tašką?

567. Kino salėje vietų skaičius eilėje yra 8 vienetais didesnis už eilių skaičių. Iš viso salėje yra 884 vietos. Kiek eilių yra kino salėje?

568. Dviejų teigiamųjų skaičių suma 5 kartus didesnė už jų skirtumą, o šių skaičių kvadratų skirtumas lygus 180. Kokie tai skaičiai?

569. Dviejų skaičių aritmetinis vidurkis lygus 9. Raskite tuos skaičius, jei jų kvadratų suma lygi 164.

570. Lėktuvo greitis, skrendant pavėjui, lygus 160 km/h, o skrendant prieš vėją — 120 km/h. Apskaičiuokite vėjo greitį ir lėktuvo greitį.

571. Skrisdamas prieš vėją, lėktuvas per 6 valandas nuskrido 2100 kilometrų. Skrisdamas tuo pačiu savuoju greičiu atgal, lėktuvas sugaišo 5 valandas. Koks yra lėktuvo greitis ir koks vėjo greitis?

572. Traukinys 480 km važiuoja 3 valandomis ilgiau, negu lėktuvas nuskrenda 1920 km. Traukinio greitis yra 8 kartus mažesnis už lėktuvo greitį. Koks yra traukinio greitis ir koks lėktuvo?

573. Kiek reikia paimti 10 % ir 20 % koncentracijos druskos tirpalų, jei juos sumaišę turime gauti 1000 g 12 % druskos tirpalą?

574. Dviženklio skaičiaus skaitmenų suma lygi 15. Jei iš šio skaičiaus atimtume 27, tai gautume dviženklį skaičių, užrašytą tais pačiais skaitmenimis, kaip pradinis skaičius, tik atvirkščia tvarka. Raskite pradinį skaičių.

575. Dviženklio skaičiaus vienetų skaitmuo yra 2 vienetais didesnis už dešimčių skaitmenį. To skaičiaus ir jo skaitmenų sumos sandauga lygi 280. Raskite tą dviženklį skaičių.

576. Dviračio priekinio rato apskritimo ilgis lygus 120 cm, o galinio rato — 122 cm. Kokį atstumą (metrais) reikia nuvažiuoti, kad dviračio priekinis ratas apsisuktų vienu apsisukimu daugiau negu galinis?

577. Stačiakampio formos sodo ilgis yra 3 m ilgesnis už dvigubą sodo plotį. Sodą juosiančios tvoros ilgis yra 72 m. Koks yra sodo ilgis ir koks plotis?

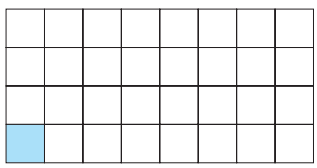
578. Stačiakampio perimetras lygus 80 m. Jei stačiakampio ilgį padidintume 8 m, o plotį — 2 m, tai jo plotas padidėtų 1,5 karto. Kokie yra stačiakampio matmenys?

579. Stačiojo trikampio perimetras lygus 56 cm, o įžambinės ilgis lygus 25 cm. Apskaičiuokite trikampio plotą.

580. Stačiojo trikampio statinių ilgių skirtumas lygus 5 dm. Jei ilgesnįjį statinį pailgintume 4 dm, o trumpesnįjį sutrumpintume 8 dm, tai gautume trikampį, kurio įžambinė būtų tokio pat ilgio, kaip ir pradinio trikampio. Apskaičiuokite pradinio trikampio statinių ilgius.

581. Iš stovyklavietės vienu metu išėjo dvi turistų grupės. Viena ėjo į šiaurę, o kita — į rytus. Po 4 h atstumas tarp grupių buvo 24 km ir pirmoji grupė buvo nuėjusi 4,8 km daugiau už antrąją. Kokiu greičiu ėjo kiekviena turistų grupė?

582. Ant stalo yra stačiakampė (bet ne kvadratinė) šokolado plytelė, suskirstyta į mažesnius kvadratinius gabalėlius. Visi gabalėliai yra saldūs, o apatinis kairysis — kartus (jis yra nuspalvintas). Radvilė ir Haroldas paeiliui laužia plytelės visą eilę (ar kelias eiles) arba horizontaliai, arba vertikaliai. Pirmoji laužia Radvilė. Kaip ji turi laužti, kad kartusis gabalėlis atitektų Haroldui?



Kiek sprendinių turi dviejų tiesinių lygčių sistema?

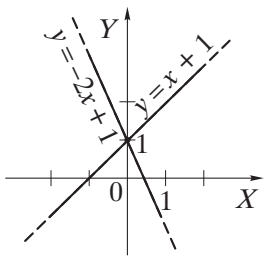
Spręsdami dviejų *tiesinių* lygčių sistemas su dviem nežinomaisiais, visada gaudavome vienintelį sprendinį. Ar visada taip yra? Norėdami atsakyti į šį klausimą, panagrinėkime dviejų tiesinių lygčių sistemos grafinį sprendimo būdą. Jei sistemos abiejų lygčių sprendiniai (tiesės) turi vienintelį bendrą tašką, tai sistema turi vienintelį sprendinį (jis yra to taško koordinatės).
Bet žinome, kad dvi plokštumos tiesės dar gali:
- būti lygiagrečiosios — tada lygčių sistema sprendinių neturi;
- sutapti — tada lygčių sistema turi be galo daug sprendinių.

Nustatykime, kiek sprendinių turi dviejų tiesinių lygčių sistema.

a) $\begin{cases} x - y = -1, \\ 2x + y = 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} y - 2x = 1, \\ 2x - y = 3; \end{cases}$ c) $\begin{cases} y - 2x = 1, \\ 2y - 4x = 2. \end{cases}$

Sprendimas. Kiekvienos lygties nežinomąjį y išreikškime nežinomuoju x ir nustatykime tiesių tarpusavio padėtį.

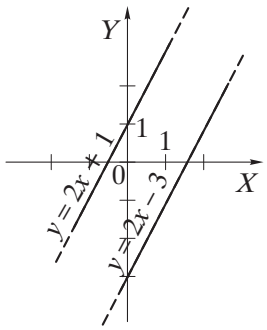
a) $\begin{cases} y = x + 1, \\ y = -2x + 1. \end{cases}$



Lygtyse prie x esantys skaičiai (tiesių krypčių koeficientai) yra skirtingi ($1 \neq -2$). Vadinasi, tiesės susikerta ir lygčių sistema turi vienintelį sprendinį.

> Tiesės $y = a_1x + b_1$ ir $y = a_2x + b_2$ susikerta, jei $a_1 \neq a_2$, o b_1 ir b_2 — bet kokie skaičiai.

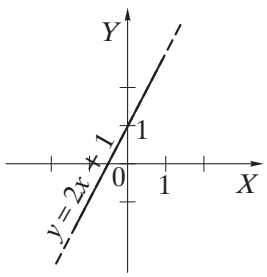
b) $\begin{cases} y = 2x + 1, \\ y = 2x - 3. \end{cases}$



Lygtyse prie x esantys skaičiai (tiesių krypčių koeficientai) yra lygūs ($2 = 2$), o laisvieji nariai (susikirtimo su OY ašimi taškai) yra skirtingi ($1 \neq -3$). Vadinasi, tiesės yra lygiagrečios ir lygčių sistema sprendinių neturi.

> Tiesės $y = a_1x + b_1$ ir $y = a_2x + b_2$ yra lygiagrečios, jei $a_1 = a_2$, o $b_1 \neq b_2$.

c) $\begin{cases} y = 2x + 1, \\ y = 2x + 1. \end{cases}$



Lygtyse ir prie x esantys skaičiai (tiesių krypčių koeficientai), ir laisvieji nariai (susikirtimo su OY ašimi taškai) yra vienodi (abi lygtys yra vienodos). Taigi lygčių sprendinių grafikai (tiesės) sutampa. Kiekvieno tiesės taško koordinatės yra sistemos sprendinys. Vadinasi, sistema turi be galo daug sprendinių.

> Tiesės $y = a_1x + b_1$ ir $y = a_2x + b_2$ sutampa, jei $a_1 = a_2$ ir $b_1 = b_2$.

Pastaba. Svarbu įsidėmėti, jog teiginys „sistema turi be galo daug sprendinių“ nereiškia, kad bet kaip parinkta skaičių pora yra lygčių sistemos sprendinys. Sistemos c) visus sprendinius galima užrašyti taip: $(x; 2x + 1)$, $x \in \boldsymbol{R}$.

Taigi dviejų tiesinių lygčių sistema gali:
- turėti vienintelį sprendinį;
- neturėti sprendinių;
- turėti be galo daug sprendinių.

Uždaviniai

1. Kiekvieną sistemos lygtį užrašykite pavidalu $y = ax + b$, o tada nustatykite lygčių sistemos sprendinių skaičių.

a) $\begin{cases} 3y + 2x = 12, \\ 6x + 9y = -9; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x = 4y - 8, \\ 6x - 8y + 16 = 0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x + 3y = 24, \\ 10x - 16y = -34; \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - 8y = 4, \\ 6x - 42 = 16y; \end{cases}$ e) $\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}y = 4, \\ x = -\frac{3}{8}y + 6; \end{cases}$ f) $\begin{cases} 4x - 5y = 30, \\ x - 1{,}25y = 2{,}5. \end{cases}$

2. Parinkite kokią nors tiesinę lygtį su dviem nežinomaisiais x ir y, kuri su lygtimi $6x + 3y = 1$ sudarytų sistemą:
a) turinčią vieną sprendinį;
b) turinčią be galo daug sprendinių;
c) neturinčią sprendinių;
d) turinčią sprendinį $\left(0; \frac{1}{3}\right)$.

3. Įrodykite, kad tiesės

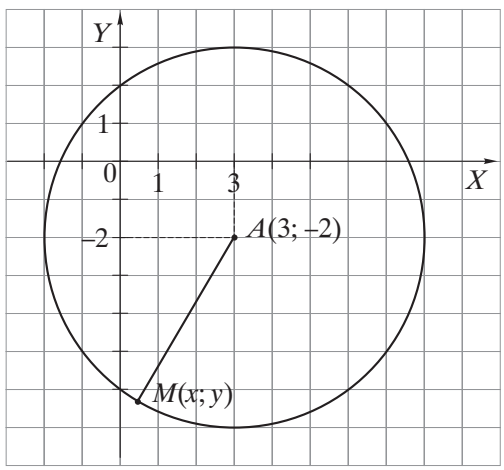
$x + y = 5$, $2x - y = 16$ ir $x + 2y = 3$

turi vieną bendrą tašką. Nurodykite jo koordinates.

Apskritimo lygtis

Koordinačių plokštumoje OXY nubrėžkime apskritimą, kurio centras būtų taške $A(3; -2)$, o spindulys $r = 5$.

Paimkime bet kurį apskritimo tašką M. Jo koordinates pažymėkime x ir y. Atstumas nuo apskritimo centro A iki taško M lygus apskritimo spinduliui, t. y. $AM = 5$. Kita vertus, atstumas tarp taškų $A(3; -2)$ ir $M(x; y)$ yra



$$AM = \sqrt{(x-3)^2 + \big(y-(-2)\big)^2}.$$

Vadinasi,

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2} = 5.$$

Šios lygybės abiejose pusėse esančius reiškinius pakelkime kvadratu:

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 5^2.$$

Gautoji lygybė vadinama *apskritìmo*, kurio centras yra $A(3; -2)$, o spindulys lygus 5, *lygtimì*.

Užduotis. Įrodykite, kad:
a) apskritimo, kurio centras yra $(0; 0)$, o spindulys lygus r, lygtis yra

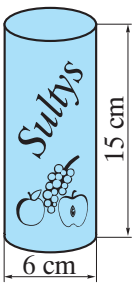
$$x^2 + y^2 = r^2;$$

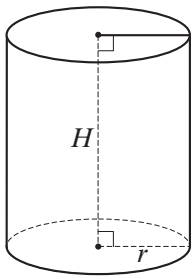
b) apskritimo, kurio centras yra $(a; b)$, o spindulys lygus r, lygtis yra

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Ritinys ir kūgis

583. Pavaizduota ritinio formos skardinė dėžutė. Jos pagrindo skersmuo lygus 6 cm, o aukštis yra 15 cm.

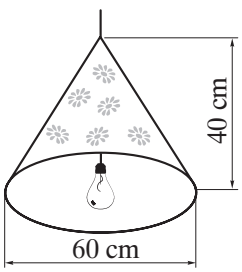


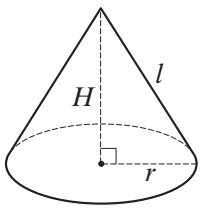


H — aukštinė,
r — pagrindo spindulys,
$S_{\text{pagr}} = \pi r^2$,
$S_{\text{šon}} = 2\pi r H$,
$S_{\text{pav}} = S_{\text{šon}} + 2 \cdot S_{\text{pagr}} =$
$= 2\pi r H + 2\pi r^2 = 2\pi r(H + r)$,
$V = S_{\text{pagr}} \cdot H = \pi r^2 H$.

Apskaičiuokite dėžutės:
a) pagrindo plotą; b) šoninio paviršiaus plotą; c) viso paviršiaus plotą; d) tūrį.
Atsakymus suapvalinkite iki šimtųjų.

2. Pavaizduotas kūgio formos šviestuvas. Jo pagrindo skersmuo lygus 60 cm, o aukštis yra 40 cm.

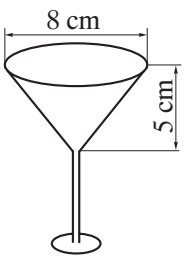


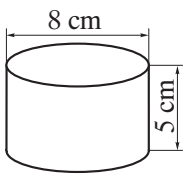


H — aukštinė,
r — pagrindo spindulys,
l — sudaromoji,
$S_{\text{pagr}} = \pi r^2$,
$S_{\text{šon}} = \pi r l$,
$S_{\text{pav}} = S_{\text{šon}} + S_{\text{pagr}} =$
$= \pi r l + \pi r^2 = \pi r(l + r)$,
$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{pagr}} \cdot H = \frac{1}{3}\pi r^2 H$.

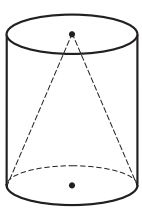
Apskaičiuokite šviestuvo:
a) sudaromosios ilgį; b) šoninio paviršiaus plotą ($0{,}1\ \text{cm}^2$ tikslumu); c) tūrį ($0{,}1\ \text{cm}^3$ tikslumu).

585. Kūgio formos taurė buvo sklidina vandens. Jos aukštis yra 5 cm, o pagrindo skersmuo lygus 8 cm. Rokas šį vandenį supylė į ritinio formos stiklinę. Stiklinės aukštis taip pat yra 5 cm, o pagrindo skersmuo — 8 cm. Koks yra vandens aukštis stiklinėje? Atsakymą parašykite 0,1 cm tikslumu.





586. Į ritinio formos dėžutę įdėta kūgio formos žvakė. Dėžutės ir žvakės pagrindai sutampa, o aukščiai yra lygūs. Apskaičiuokite žvakės tūrį $1\ \text{cm}^3$ tikslumu, jei dėžutės pagrindo plotas lygus $25\pi\ \text{cm}^2$, o šoninio paviršiaus plotas — $100\,\pi\ \text{cm}^2$.



587. Ritinio formos plastilino gabalėlio pagrindo skersmuo yra 1 cm, o aukštis — 6 cm. Rasa šį gabalėlį sulipdė į kūgio, kurio pagrindo skersmuo yra 1 cm, formą. Koks gautojo gabalėlio aukštis?

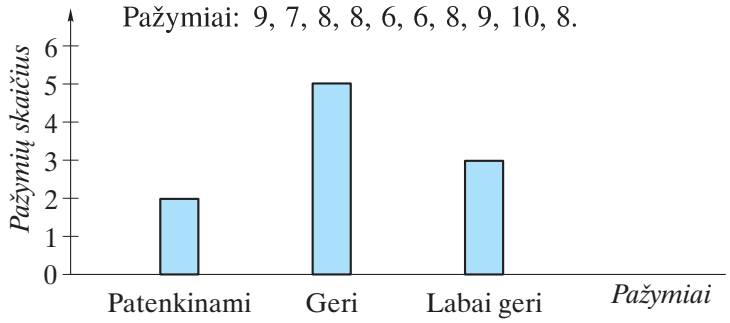
Statistika

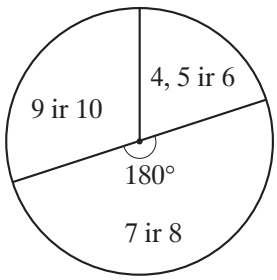
588. Rokas surašė visus per mokslo metus gautus matematikos pažymius:

4, 6, 7, 8, 10, 9, 7, 10, 6, 9, 8, 9, 8, 8, 5, 8, 9, 7.

1) Kiek Rokas per mokslo metus gavo:
   a) patenkinamų pažymių (4, 5 ir 6)?
   b) gerų pažymių (7 ir 8)?
   c) labai gerų pažymių (9 ir 10)?
2) Roko gautų patenkinamų, gerų ir labai gerų pažymių:
   a) skaičius pavaizduokite stulpeline diagrama;
   b) skaičių pasiskirstymą pavaizduokite skrituline diagrama. Kokio dydžio centrinį kampą atitinka gerus pažymius vaizduojanti skritulio išpjova?

Pažymiai: 9, 7, 8, 8, 6, 6, 8, 9, 10, 8.





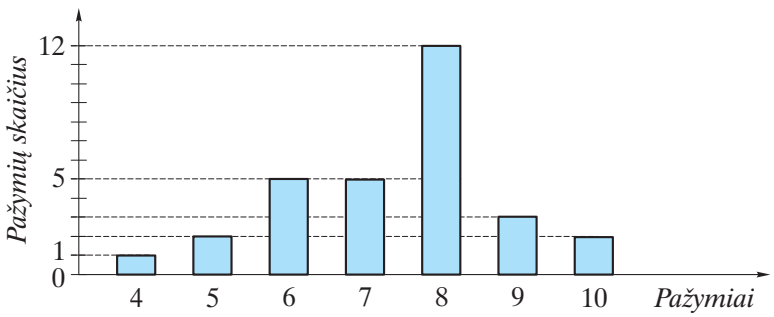
3) Apskaičiuokite Roko gautų pažymių:
   a) vidurkį; b) medianą; c) modą.

Pažymių *vidurkis* — visų pažymių suma, padalyta iš pažymių skaičiaus.
Pažymių *mediana* — vidurinis pažymių sekos, surašytos nemažėjimo tvarka (variacine eilute), narys (kai sekoje yra nelyginis skaičius narių). Kai sekoje yra lyginis skaičius narių, tai mediana lygi vidurinių narių sumos pusei.
Pažymių *moda* — dažniausiai pasikartojantis pažymys.

Pažymių 9, 7, 8, 8, 6, 6, 8, 9, 10, 8:
variacinė eilutė — 6, 6, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 10; vidurkis — $\frac{6\cdot2+7\cdot1+8\cdot4+9\cdot2+10\cdot1}{10} = 7{,}9$;
mediana — $\frac{8+8}{2} = 8$; moda — 8.

4) Kokį galutinį metinį pažymį parašytumėte Rokui?
5) Rytoj iš matematikos rašomas paskutinis kontrolinis darbas. Ar gali Rokas galutinį metinį pažymį:
   a) susigadinti? b) pataisyti?

Roko klasės kontrolinio darbo pažymius mokytoja pavaizdavo stulpeline diagrama.



6) Kiek Roko klasės mokinių rašė kontrolinį darbą?
7) Apskaičiuokite kontrolinio darbo pažymių:
   a) vidurkį; b) medianą; c) modą.

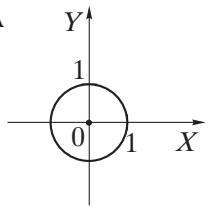
589. Kurios lygties sprendinys yra skaičių pora $(2; 5)$?

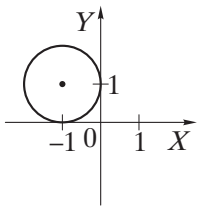
A $2x - y = 1$ **B** $x^2 - y = 1$ **C** $y - x^2 = 1$ **D** $x^2 - y^2 = 21$ **E** $y = x^2 - 23$

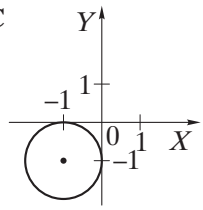
590. Lygčių sistemos $\begin{cases} 3x - y = 13, \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ sprendinys yra skaičių pora:

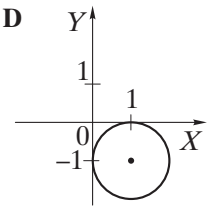
A $(6; 5)$ **B** $(13; 6)$ **C** $(5; 2)$ **D** $(2; 5)$ **E** $(13; 1)$

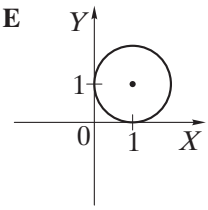
591. Lygties $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ sprendinių grafikas yra:

A


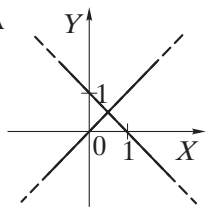
B


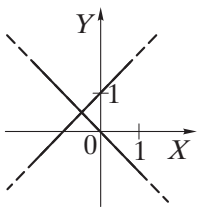
C


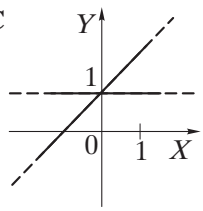
D


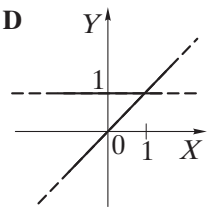
E


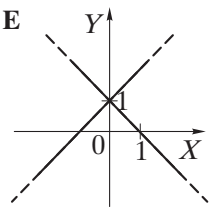
592. Kuris brėžinys vaizduoja sistemos $\begin{cases} x + y = 0, \\ y - x = 1 \end{cases}$ grafinį sprendimą?

A


B


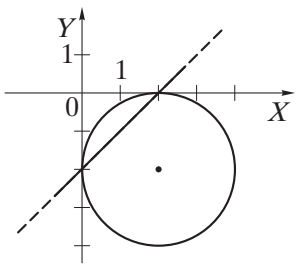
C


D


E


593. Grafiškai išspręsta (žr. pav.) lygčių sistema

$\begin{cases} y - x = -2, \\ (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4. \end{cases}$



Šios sistemos sprendiniai yra:

A $(-2; 0)$, $(0; -2)$ **B** $(-2; 0)$, $(0; 2)$ **C** $(2; 0)$, $(0; 2)$

D $(2; 0)$, $(0; -2)$ **E** $(2; 2)$, $(0; 0)$

594. Lygčių sistemos $\begin{cases} xy = 2, \\ x + y = 3 \end{cases}$ sprendiniai yra:

A $(-2; 1)$, $(-2; -1)$ **B** $(-1; 4)$, $(1; 2)$ **C** $(1; 2)$, $(2; 1)$ **D** $(-1; -2)$, $\left(4; \frac{1}{2}\right)$ **E** $\left(4; \frac{1}{2}\right)$

595. Lėktuvas 960 kilometrų pavėjui nuskrido per 3 valandas. Grįžtant atgal, tą patį atstumą jis įveikė per 4 valandas. Kurią sistemą išsprendę rasime vėjo greitį ir lėktuvo savąjį greitį?

A $\begin{cases} (x - y) \cdot 3 = 960, \\ (x + y) \cdot 4 = 960 \end{cases}$ **B** $\begin{cases} (x + y) \cdot 3 = 960, \\ (x - y) \cdot 4 = 960 \end{cases}$ **C** $\begin{cases} 3x + y = 960, \\ 4x - y = 960 \end{cases}$ **D** $\begin{cases} 3x + 4y = 960, \\ 4x - 3y = 960 \end{cases}$

E Nė vienos iš išvardytų

596. Stačiakampio perimetras lygus 16 cm, o plotas — 15 cm^2. Šio stačiakampio matmenis rasime išsprendę sistemą:

A $\begin{cases} 2(x + y) = 15, \\ x \cdot y = 16 \end{cases}$ **B** $\begin{cases} x + y = 16, \\ x \cdot y = 15 \end{cases}$ **C** $\begin{cases} x + y = 15, \\ x \cdot y = 16 \end{cases}$ **D** $\begin{cases} 2(x + y) = 16, \\ x \cdot y = 15 \end{cases}$ **E** $\begin{cases} x + y = 16, \\ 2 \cdot x \cdot y = 15 \end{cases}$

597. Ritinio, kurio aukštis yra H, o pagrindo spindulys lygus r, tūrį V galima apskaičiuoti taip:

A $V = \pi r^2$ **B** $V = \frac{1}{3}\pi r^2 H$ **C** $V = 2\pi r H$ **D** $V = \pi r^2 H$ **E** $V = 2\pi r(H + r)$

598. Pažymių 5, 8, 8, 9, 10 vidurkis, mediana ir moda, surašyti eilės tvarka, yra:

A 8; 9; 10 **B** 8; 8; 8 **C** 8,5; 8,5; 8,5 **D** 9; 5; 10 **E** 9; 9; 5

599. Kuri skaičių pora — (2; 3) ar (−2; 4) — yra lygties $x^2 - 2y + 4 = 0$ sprendinys? Nurodykite dar tris šios lygties sprendinių poras.

600. Skaičių pora (4; −1) yra lygties $x + by = 6$ sprendinys.
1) Apskaičiuokite b reikšmę.
2) Nubrėžkite lygties sprendinių grafiką.
3) Raskite koordinates taškų, kuriuose grafikas kerta abscisių ir ordinačių ašis.

601. Ieva pirko rašiklių, kainuojančių po 2 Eur, ir sąsiuvinių, kainuojančių po 3 Eur. Už pirkinį ji sumokėjo 25 Eur.
1) Sudarykite lygtį su dviem nežinomaisiais šiam uždaviniui išspręsti.
2) Nurodykite bet kurį šios lygties sprendinį.
3) Kiek daugiausia sąsiuvinių galėjo nusipirkti Ieva?
4) Nurodykite visas galimas nupirkti rašiklių ir sąsiuvinių skaičių poras.

602. Ar skaičių pora yra lygčių sistemos $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x + y = -3 \end{cases}$ sprendinys?

a) (1; −2); b) (−2; 1); c) (−1; −2); d) (−2; −1); e) (1; 2); f) (2; 1).

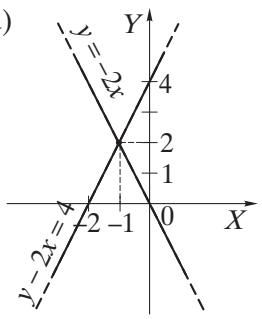
603. Grafiškai išspręskite lygčių sistemą.

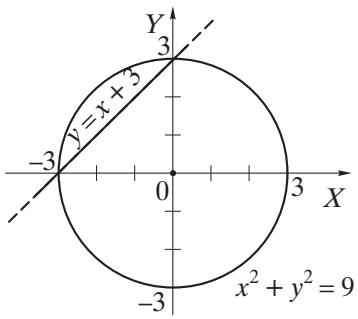
a) $\begin{cases} x - y = 2, \\ x + y = 2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ x + y = -3; \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = -\frac{2}{x}, \\ y - 2x = 2; \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = -x^2 + 1, \\ y - x - 1 = 0. \end{cases}$

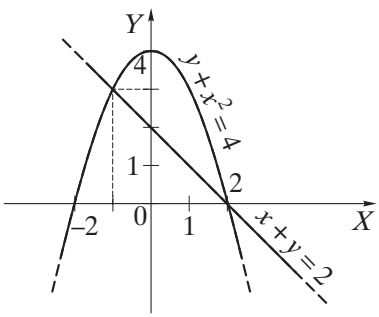
604. Išspręskite lygčių sistemą keitimo būdu.

a) $\begin{cases} x + y = 0, \\ x + 2y = -7; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 32, \\ x + y = 8; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy + 2 = 0; \end{cases}$ d) $\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 25, \\ y - x = 3. \end{cases}$

605. Dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais x ir y sistema buvo sprendžiama grafiškai. Remdamiesi brėžiniu, užrašykite ir algebriškai išspręskite lygčių sistemą.

a)


b)


c)


606. Nebraižydami grafikų, užrašykite koordinates taškų, kuriuose susikerta:
a) apskritimas $x^2 + y^2 = 64$ ir tiesė $x - y = 8$; b) tiesė $y - 2x = -9$ ir parabolė $y = 2x^2 - 6x - 1$.

607. Dviejų skaičių suma lygi 25, o tų skaičių skirtumas lygus 5. Kokie tie skaičiai?

608. Kokių dviejų skaičių suma lygi 30, o jų kvadratų suma lygi 500?

609. Po 5 metų broliui bus dvigubai daugiau metų negu sesei. Prieš 4 metus broliui buvo trigubai daugiau metų negu sesei. Kiek dabar yra metų broliui ir kiek sesei?

610. Motorinės valties greitis pasroviui yra 22 km/h, o prieš srovę — 18 km/h. Koks yra upės tėkmės greitis ir koks valties savasis greitis?

611. Stačiakampio perimetras lygus 26 cm, o plotas — 40 cm^2. Apskaičiuokite stačiakampio matmenis.

612. Stačiojo trikampio perimetras lygus 84 cm, o įžambinės ilgis — 37 cm. Apskaičiuokite trikampio plotą.

613. Ritinio formos metalinės detalės pagrindo skersmuo yra 10 mm, o aukštis — 5 mm. Iš šios detalės išlydė kūgio formos detalę, kurios aukštis yra 5 mm. Koks yra gautosios detalės pagrindo skersmuo?

614. Raskite pažymių 8, 6, 7, 7, 9, 6, 6, 6 vidurkį, medianą ir modą.

Atsakymai

1. Skaičiai, veiksmai, reiškiniai

142. a) $\{5\}$; b) $\{0\}$; c) $\{-1; 1\}$; d) $\{-3; 3\}$; e) $\{2\}$; f) $\varnothing$; g) $\{81\}$; h) $\{0\}$.

143. a) $(-\infty; 3) \cup \left[1\frac{1}{2}; +\infty\right) = (-\infty; +\infty)$; $(-\infty; 3) \cap \left[1\frac{1}{2}; +\infty\right) = \left[1\frac{1}{2}; 3\right)$;
b) $(-\infty; -10] \cup (-\infty; -4) = (-\infty; -4)$; $(-\infty; -10] \cap (-\infty; -4) = (-\infty; -10]$;
c) $[1; +\infty) \cup (-\infty; 6) = (-\infty; +\infty)$; $[1; +\infty) \cap (-\infty; 6) = [1; 6)$.

144. a) $D = \{1; 2; 3; 6\}$, $K = \{6; 12; 18; ...\} = \{6n, n \in N\}$;
b) $D = \{1; 3; 9\}$, $K = \{9; 18; 27; ...\} = \{9n, n \in N\}$;
c) $D = \{1; 11\}$, $K = \{11; 22; 33; ...\} = \{11n, n \in N\}$;
d) $D = \{1; 2; 4; 8; 16; 32\}$, $K = \{32; 64; 96; ...\} = \{32n, n \in N\}$.

145. a) $A \cup B = \{0; 5; 10; 15; 20; 25\}$, $A \cap B = \{5; 25\}$; b) $A \cup B = \{0; 1; 4; 6; 9; 12; 18\}$, $A \cap B = \varnothing$;
c) $A \cup B = [-5; 10]$, $A \cap B = [-2; 7]$; d) $A \cup B = (-\infty; 10]$, $A \cap B = (-10; 0]$.

146. a) $B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$; b) $B = \{-4; -3; -2; -1; 0\}$.

147. a) -3; b) $\frac{1}{7}$; c) $-1\frac{4}{15}$; d) -12; e) $\frac{25}{42}$; f) $\frac{1}{8}$; g) 8; h) 11; i) -3; j) 1; k) 3; l) 4; m) -2; n) 0; o) -1.

148. a) 3; b) 3; c) 9; d) $\frac{1}{9}$; e) 81; f) 9.

149. a) -2; 2; b) $\frac{1}{3}$; c) -1; 1; d) -1; e) 16; f) 8; g) 81; h) -1; i) 2; j) -1; k) 0; l) -2; m) 5; n) 1; o) $\sqrt{7}$; p) $\frac{1}{10}$.

150. a) $x \in [1; +\infty)$; b) $x \in (-\infty; +\infty)$; c) $x \in [-3; +\infty)$; d) $x \in (-\infty; +\infty)$;
e) $x \in (0; +\infty)$; f) $x \in (-\infty; 1)$; g) $x \in (0; 1), (1; +\infty)$; h) $x \in (5; 5{,}5), (5{,}5; +\infty)$.

151. a) 3; b) -1; c) -1; d) 2.

152. a) 14,5; b) $3\frac{3}{20}$.

153. a) $-a + 2$; b) $9 - 9a - 2a^2$; c) $a^2 + 3a$.

154. a) 0; 65; b) 0; 2; $8 - 2\sqrt{2}$.

155. 1) 150°; 2) 80 %.

2. Sinusai, kosinusai, tangentai

258. a) $\sin\alpha = 0{,}6$, $\cos\alpha = 0{,}8$, $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}75$; b) $\sin\alpha = 0{,}6$, $\cos\alpha = -0{,}8$, $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}75$;
c) $\sin\alpha = -0{,}6$, $\cos\alpha = 0{,}8$, $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}75$; d) $\sin\alpha = -0{,}6$, $\cos\alpha = -0{,}8$, $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}75$.

259. a) $\sin 420° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 420° = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} 420° = \sqrt{3}$; b) $\sin 750° = \frac{1}{2}$, $\cos 750° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} 750° = \frac{\sqrt{3}}{3}$;
c) $\sin(-750°) = -\frac{1}{2}$, $\cos(-750°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}(-750°) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;
d) $\sin(-420°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(-420°) = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}(-420°) = -\sqrt{3}$.

260. a) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$; b) $-\frac{\sqrt{3}}{6}$; c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; e) 1; f) 4.

261. a) $67{,}5\,\text{cm}^2$; b) $30\sqrt{3}\,\text{cm}^2$; c) $44\,\text{cm}^2$; d) $85\,\text{cm}^2$.

262. a) $\approx 8{,}2\,\text{cm}$; b) $\approx 9{,}1\,\text{cm}$; c) $\approx 6{,}7\,\text{cm}$; d) $\approx 2{,}9\,\text{cm}$.

263. a) $\approx 8{,}5$; b) $\approx 7{,}0$; c) $\approx 20{,}3$.

264. a) $\approx 9{,}82\,\text{cm}$; b) $\approx 21{,}21\,\text{cm}$; c) $\approx 9{,}54\,\text{cm}$; d) $\approx 9{,}27\,\text{cm}$.

265. a) 70°; b) 25°; c) 90°; d) 130°.

266. a) $\angle B = 40°$, $\angle C = 90°$; b) $\angle B = 60°$, $\angle C = 90°$; c) $\angle A = \angle B = 45°$, $\angle C = 90°$.

267. 216 km; 1200 m/min.

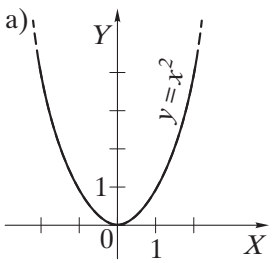
268. $P = 80\,\text{dm}$, $S = 300\,\text{dm}^2$.

3. Funkcijos

372. a) $f(x) = 0$, kai $x = 0$; $f(x) \leqslant 0$, kai $x \in (-\infty; 0]$; $f(x) > 0$, kai $x \in (0; +\infty)$;
b) $f(x) = 0$, kai $x = \frac{1}{2}$; $f(x) \leqslant 0$, kai $x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$; $f(x) > 0$, kai $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$;
c) $f(x) = 0$, kai $x = -4$; $f(x) \leqslant 0$, kai $x \in [-4; +\infty)$; $f(x) > 0$, kai $x \in (-\infty; -4)$.

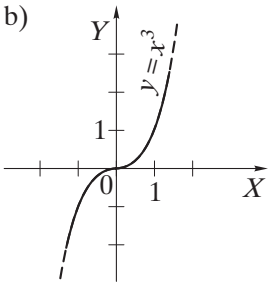
373. a) Taip; b) ne; c) ne; d) taip; e) taip.

374. 1) a)



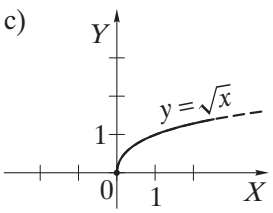
2) $x \in (-\infty; +\infty)$; $y \in [0; +\infty)$.
3) Funkcija yra lyginė.
4) $y = 0$, kai $x = 0$; $y > 0$, kai $x \in (-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$;
x reikšmių, su kuriomis $y < 0$, nėra.
5) Funkcijos reikšmės didėja, kai $x \in (0; +\infty)$;
mažėja, kai $x \in (-\infty; 0)$.

b)



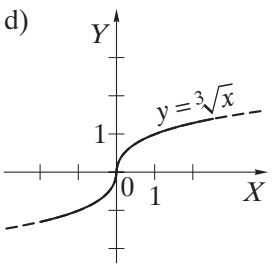
2) $x \in (-\infty; +\infty)$; $y \in (-\infty; +\infty)$.
3) Funkcija yra nelyginė.
4) $y = 0$, kai $x = 0$; $y > 0$, kai $x \in (0; +\infty)$;
$y < 0$, kai $x \in (-\infty; 0)$.
5) Funkcijos reikšmės didėja, kai $x \in (-\infty; +\infty)$.

c)



2) $x \in [0; +\infty)$; $y \in [0; +\infty)$.
3) Funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė.
4) $y = 0$, kai $x = 0$; $y > 0$, kai $x \in (0; +\infty)$;
x reikšmių, su kuriomis $y < 0$, nėra.
5) Funkcijos reikšmės didėja, kai $x \in (0; +\infty)$.

d)



2) $x \in (-\infty; +\infty)$; $y \in (-\infty; +\infty)$.
3) Funkcija yra nelyginė.
4) $y = 0$, kai $x = 0$; $y > 0$, kai $x \in (0; +\infty)$;
$y < 0$, kai $x \in (-\infty; 0)$.
5) Funkcijos reikšmės didėja, kai $x \in (-\infty; +\infty)$.

375. a) Nelyginė; b) lyginė; c) nėra nei lyginė, nei nelyginė; d) nelyginė.

376. a) Ne; b) taip; c) ne; d) taip; e) taip; f) taip.

377. a) 2^{-14}; 2^{-5}; 2^0; 2^6; 2^{10}; 2^{20}; b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-16}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{-7}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^0$; $\left(\frac{1}{3}\right)^4$; $\left(\frac{1}{3}\right)^7$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{15}$.

378. a) $x \in (0; +\infty)$; b) $x \in (-1; +\infty)$; c) $x \in (-\infty; -3)$, $(3; +\infty)$; d) $x \in (-\infty; +\infty)$.

379. 1) **A** $y = 3^x$, **B** $y = \log_{\frac{1}{3}} x$; 2) **A** $\frac{1}{3}$, **B** 3.

380. **A** $y = \cos x$, **B** $y = \operatorname{tg} x$, **C** $y = \sin x$.

381. a) $\sin(-90°)$, $\sin(-10°)$, $\sin 30°$, $\sin 50°$;
b) $\cos 150°$, $\cos 100°$, $\cos(-70°)$, $\cos(-10°)$;
c) $\operatorname{tg}(-80°)$, $\operatorname{tg}(-20°)$, $\operatorname{tg} 0°$, $\operatorname{tg} 80°$.

4. Lygtys

503. a) $x = -2$; b) $x = 3$; c) $x = -1$; d) $x = \sqrt[3]{3}$; e) $x = 1$; f) $x = 0$; g) $x = \sqrt[3]{5}$; h) $x = -\sqrt[3]{7}$; i) $x = -1$; j) $x = -2$; k) $x = 4\frac{1}{2}$; l) $x = -5$.

504. a) $x = 36$; b) $x = 25$; c) lygtis sprendinių neturi; d) $x = 1$; e) $x = 0$; f) $x = 16$; g) $x = 1$; h) lygtis sprendinių neturi; i) $x = 1$; j) lygtis sprendinių neturi; k) $x = 5$; l) $x = -5$.

505. a) $x = 4$; b) $x = 0$; c) lygtis sprendinių neturi; d) lygtis sprendinių neturi; e) $x = 1$; f) $x = 0$; g) $x = 2$; h) $x = \log_3 2$; i) $x = 4$; j) lygtis sprendinių neturi; k) $x = 1$; l) lygtis sprendinių neturi.

506. a) $x = 8$; b) $x = \frac{1}{3}$; c) $x = 1$; d) $x = 5$; e) $x = 3$; f) $x = 8$; g) $x = 8$; h) $x = \frac{1}{5}$; i) $x = 7$; j) $x = 8$; k) $x = -\frac{1}{2}$; l) $x = 3$.

507. a) $x = -9$, $x = 9$; b) lygtis sprendinių neturi; c) $x = -1$, $x = 1$; d) $x = 0$; e) $x = -4{,}5$, $x = 4{,}5$; f) $x = -1$, $x = 1$; g) $x = -3$, $x = 3$; h) lygtis sprendinių neturi; i) $x = -8$, $x = 2$; j) lygtis sprendinių neturi; k) $x = -4$; l) $x = 1\frac{1}{2}$, $x = 2\frac{1}{2}$.

508. a) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 1$, $x = 0$; b) $\sqrt{x} = 2$, $x = 4$; c) $x^3 = -1$, $x = -1$; d) $\log_2 x = -1$, $x = \frac{1}{2}$.

509. 1) a) $x = 30°$; b) $x = -30°$; c) $x = 90°$; d) $x = -90°$; e) $x = 0°$; f) $x = -60°$, $x = 60°$; g) lygtis sprendinių neturi; h) $x = 0°$; i) lygtis sprendinių neturi; j) $x = -90°$, $x = 90°$;

2) a) $x = (-1)^k \cdot 30° + 180° \cdot k$, $k \in \mathbf{Z}$;
b) $x = (-1)^{k+1} \cdot 30° + 180° \cdot k$, $k \in \mathbf{Z}$;
c) $x = 90° + 360° \cdot k$, $k \in \mathbf{Z}$;
d) $x = -90° + 360° \cdot k$, $k \in \mathbf{Z}$;
e) $x = 180° \cdot k$, $k \in \mathbf{Z}$;
f) $x = \pm 60° + 360° \cdot k$, $k \in \mathbf{Z}$;
g) $x = \pm 120° + 360° \cdot k$, $k \in \mathbf{Z}$;
h) $x = 360° \cdot k$, $k \in \mathbf{Z}$;
i) $x = 180° + 360° \cdot k$, $k \in \mathbf{Z}$;
j) $x = 90° + 180° \cdot k$, $k \in \mathbf{Z}$.

510. 1) a) $x = 60°$; b) $x = -30°$; c) $x = 45°$; d) $x = -45°$; e) $x = 0°$;

2) a) $x = 60° + 180° \cdot k$, $k \in \mathbf{Z}$;
b) $x = -30° + 180° \cdot k$, $k \in \mathbf{Z}$;
c) $x = 45° + 180° \cdot k$, $k \in \mathbf{Z}$;
d) $x = -45° + 180° \cdot k$, $k \in \mathbf{Z}$;
e) $x = 180° \cdot k$, $k \in \mathbf{Z}$.

511. a) $x = -1$; b) lygtis sprendinių neturi; c) $x = 2$; d) $x = 4$; e) $x = -4$, $x = 4$; f) lygtis sprendinių neturi; g) $x = 45°$; h) $x = 180°$.

5. Lygčių sistemos

599. $(-2; 4)$; pavyzdžiui, $(2; 4)$, $(0; 2)$, $\left(-1; 2\frac{1}{2}\right)$.

600. 1) $b = -2$; 3) $(6; 0)$, $(0; -3)$.

601. 1) $2x + 3y = 25$ (čia x — rašiklių skaičius, y — sąsiuvinių skaičius);
2) pavyzdžiui, $(5; 5)$; 3) 7 sąsiuvinius; 4) $(11; 1)$, $(8; 3)$, $(5; 5)$, $(2; 7)$.

602. a) Ne; b) ne; c) taip; d) taip; e) ne; f) ne.

603. a) $(2; 0)$; b) $(-3; 0)$, $(0; -3)$; c) sistema sprendinių neturi; d) $(-1; 0)$, $(0; 1)$.

604. a) $(7; -7)$; b) $(4; 4)$; c) $(2; -1)$, $(1; -2)$; d) $(-3; 0)$, $(2; 5)$.

605. a) $\begin{cases} y = -2x, \\ y - 2x = 4; \end{cases}$ $(-1; 2)$;

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = x + 3; \end{cases}$ $(0; 3)$, $(-3; 0)$;

c) $\begin{cases} y + x^2 = 4, \\ x + y = 2; \end{cases}$ $(-1; 3)$, $(2; 0)$.

606. a) $(8; 0)$, $(0; -8)$; b) $(2; -5)$.

607. 15 ir 10.

608. 10 ir 20.

609. Broliui yra 31 metai, o sesei — 13 metų.

610. Upės tėkmės greitis yra 2 km/h, o valties savasis greitis — 20 km/h.

611. 8 cm × 5 cm.

612. $210\,\text{cm}^2$.

613. $10\sqrt{3}$ mm.

614. Vidurkis lygus $\approx 6{,}9$, mediana — 6,5, moda — 6.

Smailiųjų kampų sinusų, kosinusų, tangentų ir kotangentų reikšmių lentelė

$\alpha =$	$\sin\alpha \approx$	$\cos\alpha \approx$	$\mathrm{tg}\,\alpha \approx$	$\mathrm{ctg}\,\alpha \approx$	$\alpha =$	$\sin\alpha \approx$	$\cos\alpha \approx$	$\mathrm{tg}\,\alpha \approx$	$\mathrm{ctg}\,\alpha \approx$
1°	0,017	1,000	0,017	57,290	46°	0,719	0,695	1,036	0,966
2°	0,035	0,999	0,035	28,636	47°	0,731	0,682	1,072	0,933
3°	0,052	0,999	0,052	19,081	48°	0,743	0,669	1,111	0,900
4°	0,070	0,998	0,070	14,301	49°	0,755	0,656	1,150	0,869
5°	0,087	0,996	0,087	11,430	50°	0,766	0,643	1,192	0,839
6°	0,105	0,995	0,105	9,514	51°	0,777	0,629	1,235	0,810
7°	0,122	0,993	0,123	8,144	52°	0,788	0,616	1,280	0,781
8°	0,139	0,990	0,141	7,115	53°	0,799	0,602	1,327	0,754
9°	0,156	0,988	0,158	6,314	54°	0,809	0,588	1,376	0,727
10°	0,174	0,985	0,176	5,671	55°	0,819	0,574	1,428	0,700
11°	0,191	0,982	0,194	5,145	56°	0,829	0,559	1,483	0,675
12°	0,208	0,978	0,213	4,705	57°	0,839	0,545	1,540	0,649
13°	0,225	0,974	0,231	4,331	58°	0,848	0,530	1,600	0,625
14°	0,242	0,970	0,249	4,011	59°	0,857	0,515	1,664	0,601
15°	0,259	0,966	0,268	3,732	60°	0,866	0,500	1,732	0,577
16°	0,276	0,961	0,287	3,487	61°	0,875	0,485	1,804	0,554
17°	0,292	0,956	0,306	3,271	62°	0,883	0,469	1,881	0,532
18°	0,309	0,951	0,325	3,078	63°	0,891	0,454	1,963	0,510
19°	0,326	0,946	0,344	2,904	64°	0,899	0,438	2,050	0,488
20°	0,342	0,940	0,364	2,747	65°	0,906	0,423	2,145	0,466
21°	0,358	0,934	0,384	2,605	66°	0,914	0,407	2,246	0,445
22°	0,375	0,927	0,404	2,475	67°	0,921	0,391	2,356	0,424
23°	0,391	0,921	0,424	2,356	68°	0,927	0,375	2,475	0,404
24°	0,407	0,914	0,445	2,246	69°	0,934	0,358	2,605	0,384
25°	0,423	0,906	0,466	2,145	70°	0,940	0,342	2,747	0,364
26°	0,438	0,899	0,488	2,050	71°	0,946	0,326	2,904	0,344
27°	0,454	0,891	0,510	1,963	72°	0,951	0,309	3,078	0,325
28°	0,469	0,883	0,532	1,881	73°	0,956	0,292	3,271	0,306
29°	0,485	0,875	0,554	1,804	74°	0,961	0,276	3,487	0,287
30°	0,500	0,866	0,577	1,732	75°	0,966	0,259	3,732	0,268
31°	0,515	0,857	0,601	1,664	76°	0,970	0,242	4,011	0,249
32°	0,530	0,848	0,625	1,600	77°	0,974	0,225	4,331	0,231
33°	0,545	0,839	0,649	1,540	78°	0,978	0,208	4,705	0,213
34°	0,559	0,829	0,675	1,483	79°	0,982	0,191	5,145	0,194
35°	0,574	0,819	0,700	1,428	80°	0,985	0,174	5,671	0,176
36°	0,588	0,809	0,727	1,376	81°	0,988	0,156	6,314	0,158
37°	0,602	0,799	0,754	1,327	82°	0,990	0,139	7,115	0,141
38°	0,616	0,788	0,781	1,280	83°	0,993	0,122	8,144	0,123
39°	0,629	0,777	0,810	1,235	84°	0,995	0,105	9,514	0,105
40°	0,643	0,766	0,839	1,192	85°	0,996	0,087	11,430	0,087
41°	0,656	0,755	0,869	1,150	86°	0,998	0,070	14,301	0,070
42°	0,669	0,743	0,900	1,111	87°	0,999	0,052	19,081	0,052
43°	0,682	0,731	0,933	1,072	88°	0,999	0,035	28,636	0,035
44°	0,695	0,719	0,966	1,036	89°	1,000	0,017	57,290	0,017
45°	0,707	0,707	1,000	1,000					

Užrašams

	Mokinio vardas ir pavardė	Mokslo metai	Vadovėlio išvaizda (l. gera, gera, patenkinama)	
			mokslo metų pradžioje	mokslo metų pabaigoje

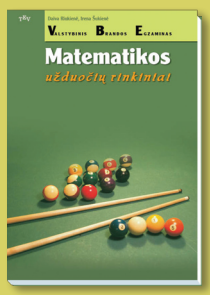
GERBKITE IR TAUSOKITE VADOVĖLIUS

MATEMATIKA TAU^{+}. 11 KLASĖ
Bendrasis kursas

2016 07 19. 19,5 sp. l.
Leidykla TEV, Mokslininkų g. 2A, LT-08412 Vilnius
Spausdino UAB „Petro ofsetas“
Naujoji Riovonių g. 25C, LT-03153 Vilnius

Visi uždaviniai patikrinti ir perspręsti leidyklos specialistų.

RENGDAMIESI BRANDOS EGZAMINUI



PASPRĘSKITE



PASITIKRINKITE



PAKARTOKITE

VADOVĖLIO Matematika tau+ KOMPLEKTĄ SUDARO:

- **Vadovėlis** – visiems
- Parsisiųsdinama **Skaitmeninė vadovėlio versija** – naudojantiems kompiuterius
- **Pratybų sąsiuvinis** – kuriems vadovėlio užduotys per sunkios
- **Savarankiški ir kontroliniai darbai** – į pagalbą mokytojams
- **Mobili interaktyvi kompiuterinė (MIKO) knyga** mokytojams – informacijos kaupimui ir tvarkymui
- **Kompiuterinių užduočių rinkinių konstruktorius (KURK–SKD)** mokytojams – savarankiškų ir kontrolinių darbų kūrimui

Parsisiųsdinamas skaitmenines vadovėlių versijas rasite internete

www.evadovėliai.lt

JAU SU ATSAKYMAIS!



€
ISBN 978-609-433-281-4
9 786094 332814